

7. ALGEBRISKAS IZTEIKSMES UN VIENĀDOJUMI

[Temata apraksts](#)

[Skolēnam sasniedzamo rezultātu ceļvedis](#)

[Uzdevumu piemēri](#)

[Stundas piemērs](#)

M_10_SP_07_01_P1

[Racionālu algebrisku izteiksmju identiskie pārveidojumi](#)

Skolēna darba lapa

M_10_SP_07_02_P1

[Trešās pakāpes vienādojumu atrisināšana](#)

Skolēna darba lapa

M_10_SP_07_02_P2

[Vienādojumu atrisināšanas vēsture](#)

Skolēna darba lapa

M_10_LD_07

[Dvīņu skaitļi](#)

Skolēna darba lapa

[1.variants](#)

[2.variants](#)

[Vērtēšanas kritēriji](#)

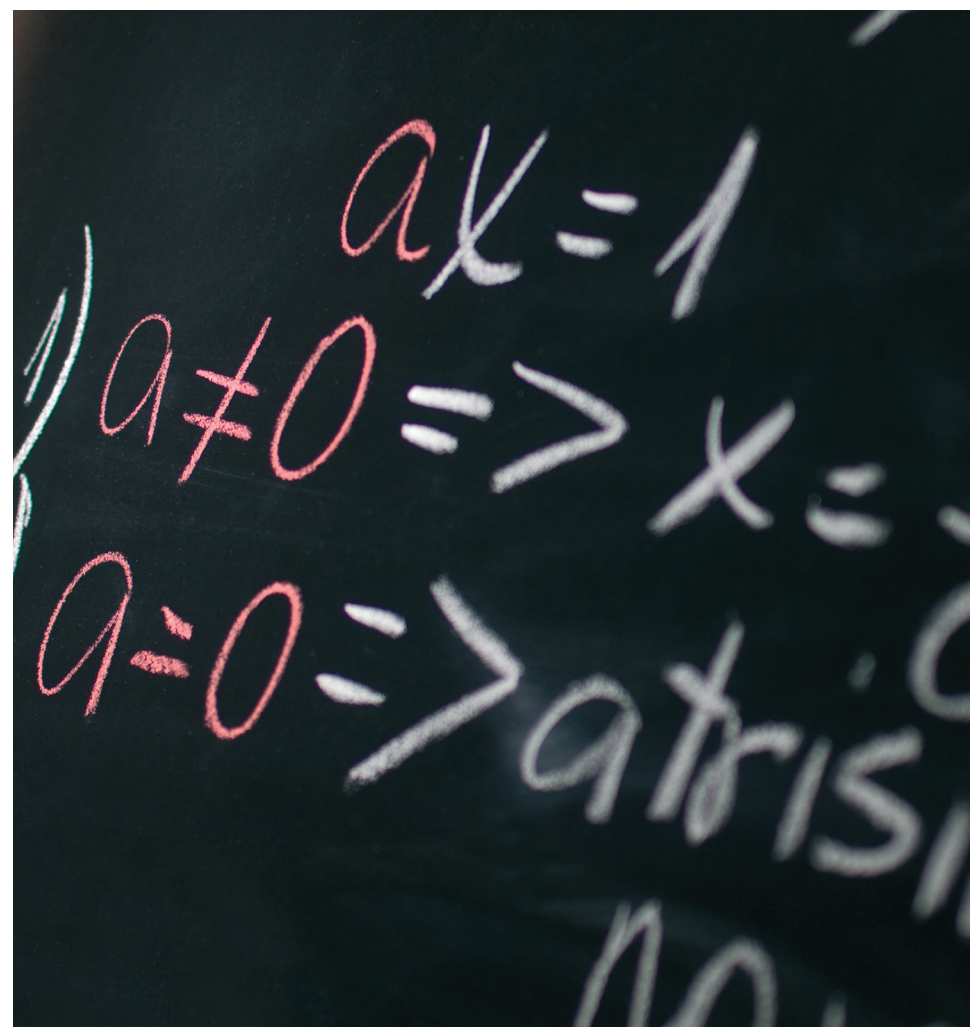
ALGEBRISKAS IZTEIKSMES UN VIENĀDOJUMI

TEMATA APRAKSTS

Temats ir nozīmīgs, jo nostiprina algoritmiskās prasmes, pilnveido izpratni par vienādojumu kā reāla procesa modeli. Būtiski ir prast izveidot algebrisku izteiksmi vai vienādojumu kā matemātisku modeli, risinot dažādus uzdevumus, piemēram, par procentiem un kustību, kā arī saskatīt atšķirību starp vienādojuma kā matemātiska modeļa atrisinājumu un reālas problēmas atrisinājumu.

Pamatskolā skolēni jau apguvuši racionālas algebriskas izteiksmes, identitātes un vienādojuma jēdzienus, prot izpildīt identiskus pārveidojumus, atrisināt lineārus un kvadrātvienādojumus. Īpaša uzmanība veltīta izteiksmes definīcijas apgabala nozīmei, aplūkojot izteiksmju pārveidojumus, kur tas mainās. Skolēniem jāveido izpratne par to, ka atrisināt vienādojumu nozīmē atrast visas tā saknes un pamatot, ka citu nav.

Izmantojot pazīstamus vienādojumus, būtiski ir attīstīt prasmes saskatīt un lietot atbilstošas vienādojumu risināšanas metodes (sadališana reizinātājos, substitūcijas metode, grafiskais paņēmieni), kas noderēs arī citu vienādojumu atrisināšanā. Dažkārt ir lietderīgi uzskicēt grafikus, lai rastos priekšstats par vienādojuma sakņu skaitu, turklāt tiek nostiprinātas iemaņas funkciju grafiku zīmēšanā.



CEĻVEDIS

Galvenie skolēnam sasniedzamie rezultāti

STANDARTĀ	Izprot izteiksmju definīcijas apgabala nozīmi, izpilda matemātisku izteiksmju identiskos pārveidojumus.	Izprot, ko nozīmē atrisināt vienādojumu, vienādojumu sistēmu; lieto vienādojumam, vienādojumu sistēmai piemērotus atrisināšanas algoritmus vai vispārīgās metodes.	Izvērtē iegūtos rezultātus, to ticamību un atbilstību kontekstam, novērtē izvēlēto problēmas risinājumu, iesaka uzlabojumus, piedāvā citu risinājumu.	Lieto matemātikas mācību saturā sastopamos jēdzienus un pieņemtos simbolus kā valodas kultūras elementus.	Plāno risinājumu; izvēlas vai izveido problēmai atbilstošu matemātisko modeli.	Izprot matemātikas kā zinātnes attīstības tendences un novērtē matemātikas svarīgāko sasniegumu nozīmi sabiedrības attīstībā, nosaucot piemērus.
PROGRAMMĀ	- Izpilda identiskus pārveidojumus ar daļveida racionālām algebriskām izteiksmēm. - Nosaka racionālu algebrisku izteiksmju definīcijas apgabalu.	- Izprot, ko nozīmē atrisināt vienādojumu. - Izprot daļveida vienādojuma atrisināšanu, atrisina daļveida racionālus vienādojumus, kas satur pirmās un otrās pakāpes polinomus. - Izprot substitūciju metodi, lieto to augstāku pakāpju un daļveida vienādojumu atrisināšanā. - Izprot vienādojuma atrisināšanu, izmantojot sadalīšanu reizinātājos, lieto šo metodi trešās un ceturrtās pakāpes vienādojumu atrisināšanā. - Lieto vienādojumu atrisināšanas grafisko paņēmieni.	Saskata atšķirību starp vienādojuma kā matemātiska modeļa atrisinājumu un reālās problēmas atrisinājumu; izprot, kādā skaitļu kopā meklējams konkrētās problēmas atrisinājums, novērtē vienādojuma atrisinājuma atbilstību kontekstam.	Lieto jēdzienus – <i>racionāla algebriska izteiksme, identitāte, identiski vienādas izteiksmes, identisks pārveidojums, sadalīšana reizinātājos, kvadrāttrinoms, monoma un polinoma pakāpe, ekvivalenti vienādojumi, vienādojuma sakne, substitūcija (aizvietošana), sadalīšana reizinātājos, modulis</i> –, komentējot darbības ar izteiksmēm, vienādojuma atrisināšanas gaitu.	Izveido algebrisku izteiksmi vai vienādojumu kā matemātisko modeli, risinot dažādus uzdevumus (par procentiem un proporcijām, par kustību, ar ģeometrisku saturu u.c.).	Ir iepazinies ar vienādojumu atrisināšanas vēsturi, novērtē augstākas pakāpes vienādojumu atrisināšanas iespējas.
STUNDĀ	Uzdevumu risināšana. Jautājumi un atbildes. <i>SP. Racionālu algebrisku izteiksmju identiskie pārveidojumi.</i>	<i>VM. Vienādojuma grafiskā atrisināšana.</i> <i>KD. Daļveida vienādojumi.</i>		<i>KD. Izteiksmju pārveidojumi.</i> <i>KD. Identiskas izteiksmes.</i>	Izpēte. <i>LD. Algebriskas izteiksmes skaitļu pētišanā.</i>	Darbs ar tekstu. Uzdevumu risināšana. <i>SP. Augstāku pakāpju vienādojumu atrisināšanas iespējas.</i>

UZDEVUMU PIEMĒRI

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Nosaka racionālu algebrisku izteiksmju definīcijas apgabalu.	Kuras no dotajām algebriskajām izteiksmēm nav definētas, ja $y=5$? a) $\frac{y+5}{y-5}$ b) $\frac{y-5}{y}$ c) $\frac{y-5}{y+5}$ d) $\frac{(y-5)^2}{y+5}$	Nosaki izteiksmes definīcijas apgabalu! a) $\frac{a-5}{a^2}$ b) $\frac{x+3}{x^2-3x-4}$ c) $\frac{3y}{y^2+1}$	Uzraksti racionālu algebrisku izteiksmi, kuras definīcijas apgabals ir $(-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$!
Izpilda identiskus pārveidojumus ar daļveida racionālām algebriskām izteiksmēm.	Pārveido par daļu! a) $2 - \frac{x+1}{3}$ b) $\frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x-1}$	Saīsi daļu! Norādi skaitļu kopu, kurā iegūtā izteiksme ir identiski vienāda ar doto! $\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-x-2}$	Nosaki, kurš apgalvojums ir patiess! Nepatiesos apgalvojumus ilustrē ar piemēriem! Dotajai izteiksmei identiski vienādu izteiksmi noteikti iegūs, ja: a) dotajā izteiksmē iznesīs kopīgo reizinātāju pirms iekavām, b) doto izteiksmi kāpinās kvadrātā, c) doto izteiksmi A reizinās un izdalīs ar vienu un to pašu izteiksmi B .
Izprot, ko nozīmē atrisināt vienādojumu.	1. Uzraksti, ko nozīmē atrisināt vienādojumu! 2. Cik atrisinājumu ir vienādojumam? a) $4x-x-3=3x+2$ b) $5y-2=4y-2+y$	1. Uzraksti lineāru vienādojumu pamatformā, kuram nav sakņu! 2. Vai dotie vienādojumi ir ekvivalenti? a) $\frac{x-2}{x+3} = \frac{3x+4}{x+3}$ un $x-2=3x+4$ b) $\frac{x-2}{x^2+1} = \frac{6}{x^2+3}$ un $x-2=6$	1. Vai vienādojums ir atrisināts pareizi? $x^4=x$ $x=1$, jo $1^4=1$ $x=0$, jo $0^4=0$ Atbilde: $x=1$ un $x=0$ 2. Atrisini vienādojumu, nekāpinot binomus kvadrātā! $(x-2)^2+(3x-5)^2=0$

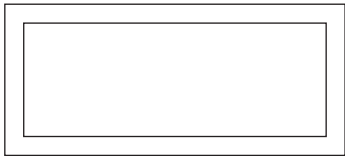
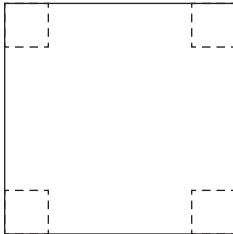
Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Izprot daļveida vienādojuma atrisināšanu, atrisina daļveida racionālus vienādojumus, kas satur pirmās un otrās pakāpes polinomus.	1. Pabeidz apgalvojumu! Daļa ir vienāda ar nulli, ja skaitītājs, bet saucējs 2. Atrisini vienādojumu! a) $\frac{x^2-9}{x+3}=0$ b) $\frac{2x}{x-1}-2=0$	Atrisini vienādojumu! $\frac{x}{x-10}-\frac{8}{x-6}=\frac{4x}{x^2-16x+60}$	1. Kur risinājumā ir ieviesusies kļūda? $\frac{x^2-2x}{x-2}=0$ $x^2-2x=0 \cdot (x-2)$ $x^2-2x=0$ $x(x-2)=0$ $x_1=0$ $x_2=2$ 2. Nosaki, ar kādām a vērtībām vienādojumam $\frac{x^2+4x}{x+a}=0$ būs viena sakne!
Atrisina vienādojumus formā $x^n=a$, kur $n \in \mathbb{N}$.	Atrisini vienādojumu! a) $x^3=7$ b) $x^4=-16$	Atrisini vienādojumu! $(2x-1)^3=-8$	Atrisini vienādojumu visām a vērtībām! $x^4=a$
Izprot substitūciju metodi, lieto to augstāku pakāpju un daļveida vienādojumu atrisināšanā.	1. Papildini teikumus! Vienādojumu risināšana ar substitūcijas metodi sastāv no šādiem posmiem: a) izteiksmi, kuru satur dotais vienādojums, apzīmē b) uzraksta ar jaunu mainīgo tā, ka paliek tikai mainīgais, c) atrisina d) iegūtās jaunā mainīgā vērtības ievieto izteiksmē, kur tas tika nodefinēts, e) atrisina 2. Atrisini vienādojumu! a) $(2x-1)^3=-1$ b) $(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15=0$	1. Ja iespējams, pārveido doto vienādojumu par vienkāršāku, izmantojot atbilstošu substitūciju (vienādojums nav jāatrisina)! a) $(x^2+3x)^2-10x^2-30x-24=0$ b) $(3x-5)^2-4(3x-5)=3x^2-15$ c) $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}=2,05$ 2. Izdomā ceturtais pakāpes vienādojumu, lai to varētu atrisināt, izmantojot substitūciju metodi!	Atrisini vienādojumu! $x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=10$

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Izprot vienādojuma atrisināšanu, izmantojot sadalīšanu reizinātājos, lieto šo metodi trešās un ceturtās pakāpes vienādojumu atrisināšanā.	1. Cik sakņu ir dotajam vienādojumam? $(3x-17)(9x-2)4x=0$ 2. Atrisini vienādojumu! $3z^4-z^3=0$	1. Atrisini vienādojumu! $x^3+2x^2-x-2=0$ 2. Kur risinājumā ieviesusies kļūda? Izskaidro tās rašanās cēloņus! $(x-2)(x-1)=1$ $x-2=1$ un $x-1=1$ $x_1=3$ un $x_2=2$	1. Uzraksti piektās pakāpes vienādojumu, kuram ir tieši trīs dažādas saknes! 2. Izmantojot tekstā doto informāciju, atrisini vienādojumu $(x-5)(y-4)=0$! Atrisina vienādojumu ar diviem mainīgajiem x un y nozīmē: a) atrast visus skaitļu pārus $(x;y)$, kurus ievietojot dotajā vienādojumā, tas pārvēršas par pareizu skaitlisku vienādību; b) pamatot, ka citu tādu skaitļu pāru nav.
Atrisina vienādojumus, kas satur moduli $ f(x) =a$ ($a \in R$) un $ f(x) = g(x) $, izmantojot moduļa definīciju un ģeometrisku interpretāciju.	Atrisini vienādojumu! a) $ x+5 =4$ b) $ x^2-25 =-25$ c) $\left \frac{1-2x}{x+1}\right =1$	1. Atrisini vienādojumu! $ 5-x = x+8 $ 2. Atrisini vienādojumu! $5 x-5 -2= x-5 $	Atrisini vienādojumu visām a vērtībām! $ x-2 =a$
Lieto vienādojumu atrisināšanas grafisko paņēmieni.	1. Papildini teikumus! Vienādojuma $2^x=3x-1$ risināšana ar grafisko paņēmieni sastāv no šādiem soļiem: a) konstruē funkcijas $y= \dots\dots\dots$ grafiku, b) konstruē $\dots\dots\dots$, c) saskata punktus, kuros $\dots\dots\dots$, d) nosaka vienādojuma saknes, kuras ir šo punktu $\dots\dots\dots$, e) pārbauda $\dots\dots\dots$ 2. Konstruē funkciju $y=2x-1$ un $y=x^3$ grafikus vienā koordinātu sistēmā! Izmantojot grafikus, atrisini vienādojumu $2x-1=x^3$!	1. Cik sakņu ir dotajam vienādojumam? $2+x^2=\frac{12}{x}$ 2. Nosaki, cik sakņu ir vienādojumam $0,3^x-x^2+x=1$! Nosaki sakņu aptuvenās vērtības ar precizitāti līdz desmitdaļām!	1. Kurus no dotajiem vienādojumiem tu risinātu ar grafisko paņēmieni un kurus – ne? Atbilde pamato! a) $x-2=3x$ b) $x^3-2=x$ c) $x^2=x+2$ 2. Nosaki vienādojuma $x^2=ax-1$ sakņu skaitu atkarībā no a vērtības!

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Lieto jēdzienus – <i>racionāla algebriska izteiksme, identitāte, identiski vienādas izteiksmes, identisks pārveidojums, sadalīšana reizinātajos, kvadrātrinoms, monoma un polinoma pakāpe, ekvivalenti vienādojumi, vienādojuma sakne, substitūcija (aizvietošana), sadalīšana reizinātajos, modulis –</i> , komentējot darbības ar izteiksmēm, vienādojuma atrisināšanas gaitu.	1. Uzraksti: a) identitāti, b) kvadrātrinomu, c) trešās pakāpes polinomu! 2. Komentē dotos pārveidojumus! $\frac{6x^2-54}{3x+9} = \frac{6(x^2-9)}{3(x+3)} = \frac{2(x^2-9)}{(x+3)} = \frac{2(x+3)(x-3)}{(x+3)} = 2(x-3) = 2x-6$	Kur vienādojuma risinājumā ieviesusies kļūda? Izskaidro tās rašanās cēloņus! $x^2-4x=x-4$ $x(x-4)=x-4 \quad :(x-4)$ $x=1$	Formulē nosacījumu par izteiksmi $c(x)$, lai vienādojumi $a(x)=b(x)$ un $a(x) \cdot c(x)=b(x) \cdot c(x)$ būtu ekvivalenti!
Izvēlas paņēmieni polinomu sadalīšanai reizinātajos: iznesot kopīgo reizinātāju pirms iekavām, grupējot polinoma locekļus, izmantojot saknes, lietojot saīsinātās reizināšanas formulas (arī kubu summa, starpība, summas, starpības kubs).	1. Kura no izteiksmēm ir sadalīta reizinātajos? a) $(x-2) \cdot a-2$ b) $x \cdot a-2 \cdot x$ a) $(x-2) \cdot (a-2)$ b) $(x-a-2) \cdot 2$ 2. Norādi, ar kuru no paņēmieniem (iznešana pirms iekavām, grupēšana, sakņu izmantošana, saīsinātās reizināšanas formulu lietošana) var sadalīt reizinātajos doto izteiksmi! a) $c^4d-c^5d^3$ b) x^3+x^2-9x-9 c) $x^2+8x-20$ d) $0,25-4b^2$ e) m^3-125 f) $25y^2+30y+9$ 3. Uzraksti "pazīmi", pēc kuras varētu pateikt, vai dotā izteiksme ir sadalīta reizinātajos!	1. Sadali reizinātajos! a) $(m+3)^2-a(m+3)$ b) a^6-b^6 c) $25-(b+3)^2$ d) $7y^3-56$ e) $5y^2+8y-13$ f) $9-m^2-2mn-n^2$ 2. Sadali izteiksmi x^6-1 reizinātajos divos veidos!	Sadali reizinātajos izteiksmi x^4+64, izmantojot identisku pārveidojumu $a+b=a+b+c-c$!

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Saskata likumsakarības, iespēju vispārināt saīsinātās reizināšanas formulas.	Kāpini dotos polinomus (ja nepieciešams, pārej uz reizināšanu)! $(a+b)^2=$ $(a+b+c)^2=$ $(a+b+c+d)^2=$ Izmantojot iegūtos rezultātus, papildini teikumu! Summas kvadrāts vienāds ar visu saskaitāmo un katru divu saskaitāmo divkārtotu summu.	Kāpini binomu! $(a-b)^0=$ $(a-b)^1=$ $(a-b)^2=$ $(a-b)^3=$ $(a-b)^4=$ utt. Ja vari saskatīt likumsakarību, noformulē to! Salīdzini izkāpināto binomu koeficientus ar Paskāla trijstūri (M_10_UP_07_VM1 un VM2)!	Izveido uzdevumu virkni (no vienkāršākā uz sarežģītāko), kuru atrisināšana tev ļautu sadalīt reizinātājos izteiksmi a^5-b^5!
Analizē gadījumus, risinot lineārus vienādojumus ar parametru formā $ax=b$ ($a, b \in R$), $x =a$ ($a \in R$) un $ax^2=b$ ($a, b \in R$).	Nosaki, kāds skaitlis jāieraksta daudzpunktu vietā, lai vienādojumam nebūtu sakņu! $\dots \cdot x = 5$	Atrisini vienādojumu, ja nezināmais ir x! a) $ax=4$ b) $x^2=a$	Atrisini vienādojumu $ax=b$ visām iespējamām a un b vērtībām!
Izveido algebrisku izteiksmi vai vienādojumu kā matemātisko modeli, risinot dažādus uzdevumus (par procentiem un proporcijām, par kustību, ar ģeometrisku saturu u.c.).	Kvadrāta mala ir b cm. Divas pretējās kvadrāta malas tika pagarinātas par 2 cm, bet pārējās divas malas palielinātas par 20 %. Izsaki iegūtā taisnstūra laukumu kā algebrisku izteiksmi!	1. Preces sākotnējā cena bija a lati. Tā tika paaugstināta par 25 %. Pēc kāda laika tā tika paaugstināta vēl par 20 %. Uzraksti izteiksmi, kas izsaka pašreizējo cenu! 2. Divi strādnieki nopelnīja kopā 310 latu. Cik latu nopelnīja katrs strādnieks, ja 4 % no pirmā strādnieka algas ir vienādi ar 6 % no otrā strādnieka algas?	Tūristam noteiktā laikā bija jānokļūst līdz autobusa pieturai. Noejot pirmajā stundā 4 km, viņš aprēķināja, ka ejot ar šādu ātrumu, viņš autobusu nokavēs par 40 minūtēm, tāpēc atlikušo ceļu viņš gāja ar ātrumu 6 km/h un nonāca autobusa pieturā 20 minūtes pirms tā atiešanas. Aprēķini, cik garš ceļš bija jānoiet tūristam!

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Saskata atšķirību starp vienādojuma kā matemātiska modeļa atrisinājumu un reālās problēmas atrisinājumu; izprot, kādā skaitļu kopā meklējams konkrētās problēmas atrisinājums; novērtē vienādojuma atrisinājuma atbilstību kontekstam.	1. Uzraksti, kurā skaitļu kopā (N, Z, Q, R) vajadzētu atrasties atrisinājumam, ja jāaprēķina: a) cilvēku skaits, kas piedalās ekskursijā, b) trijstūra malas garums, c) dienu skaits, d) motocikla ātrums, e) divu veselu skaitļu reizinājums, f) šķiduma masa! 2. Trijstūra augstums ir par 5 cm garāks nekā mala, pret kuru tas novilkts. Aprēķini šīs malas garumu, ja zināms, ka trijstūra laukums ir 12 cm^2! 3. Prognozē, kādā intervālā ir dotā uzdevuma atrisinājums (uzdevums nav jāatrisina)! Piena kombinātā piegādāja 1260 kg piena, kura tauku saturs bija 3,15 %, un 1540 kg piena, kura tauku saturs bija 2,85 %. Visu pienu sajauc kopā. Aprēķini iegūtā maisījuma tauku saturu procentos!	Baseinam pievienotas divas caurules. Pirmā caurule viena pati baseinu piepilda par 3 stundām ātrāk nekā otrā. Ja pirmo cauruli atvērtu par 1,5 stundām vēlāk nekā otro cauruli, tad tvertne piepildītos 7 stundās. Cik stundās katra caurule atsevišķi var piepildīt baseinu? Apzīmējot ar x stundu skaitu, kurā baseinu piepilda pa otro cauruli, sastādot vienādojumu $\frac{1}{x} \cdot 7 + \frac{1}{x-3} \cdot 5,5 = 1$ un atrisinot to, ieguva saknes $x_1 = 14$ un $x_2 = 1,5$. Novērtē vienādojuma atrisinājuma atbilstību uzdevuma nosacījumiem!	Vienādsānu trijstūra pamats ir par 6 cm garāks nekā sānu mala, bet trijstūra perimetrs ir p. Aprēķini trijstūra malas un nosaki, ar kādām p vērtībām uzdevumam ir atrisinājums!
Ir iepazinies ar vienādojumu atrisināšanas vēsturi, novērtē augstākas pakāpes vienādojumu atrisināšanas iespējas.	Nosauc slavenus matemātiķus, kuri savos zinātniskajos darbos ir pētījuši vienādojumus!	1. Uzraksti, tavuprāt, racionālāko dotā vienādojuma atrisināšanas metodi! a) $x^5 - 2x - 1 = 0$ b) $x^6 - x^3 - 2 = 0$ c) $x^4 + x^3 - 2x^2 = 0$ 2. Atrodi informāciju par to, kuras pakāpes vienādojumiem vispārīgā veidā ir sakņu atrisināšanas formulas! Uzraksti šīs formulas!	Vienādojumam $x^3 + x^2 - 5x - 2 = 0$ viena no saknēm ir 2. Atrodi pārējās vienādojuma saknes!

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Risinot praktiskus uzdevumus, izmanto vienādojumus.	Temperatūras skaitliskās vērtības pēc Celsija skalas (C) un Fārenheita skalas (F) saista sakarība $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Kāda temperatūra pēc Fārenheita skalas atbilst 30 grādiem pēc Celsija skalas? Temperatūras skaitliskā vērtība pēc Celsija skalas ir puse no temperatūras skaitliskās vērtības pēc Fārenheita skalas. Cik liela ir temperatūra pēc Celsija skalas?	1. Doti 2 litri 9 % etiķa šķīduma. Kāds daudzums 70 % etiķa esences jāpielej, lai iegūtu 20 % etiķa šķīdumu? 2. Sporta laukumam ir taisnstūra forma, kura malas ir 30 m un 80 m. Visapkārt ap to ir skrejceļš, kura platums gar laukuma malām ir vienāds (zīm.). Skrejceļa laukums ir vienāds ar sporta laukuma platību. Nosaki skrejceļa platumu ar precizitāti līdz desmitdaļām! <i>Atļauts izmantot kalkulatoru.</i> 	Izdarot stūros vienādus kvadrātveida iegriezumus (zīm.) un uzlokot tos uz augšu, no kvadrātveida kartona gabala jāizgatavo kārbā, kuras augstums ir 8 garuma vienības un tilpums ir 128 tilpuma vienības. Kāda izmēra kvadrātveida kartons jāņem? <i>Līmēšanai maliņas nav jāparedz.</i> 

STUNDAS PIEMĒRS

RACIONĀLU ALGEBRISKU IZTEIKSMJU IDENTISKIE PĀRVEIDOJUMI

Mērķis

Nostiprināt zināšanas un prasmes algebrisku izteiksmju pārveidošanā un atbilstošo jēdzienu lietošanā, veicinot skolēnu sadarbības, pašnovērtēšanas un savstarpējās vērtēšanas prasmju attīstību.

Skolēnam sasniedzamais rezultāts

- Izpilda izteiksmju identiskos pārveidojumus.
- Paskaidro risinājumu, pamato pārveidojumu gaitu.
- Sadarbojas un respektē cita skolēna vajadzības.

Nepieciešamie resursi

Izdales materiāls – vērtējuma lapa (M_10_SP_07_01_P1).

Mācību metodes

Uzdevumu risināšana, jautājumi un atbildes.

Mācību organizācijas formas

Individuāls darbs, pāru darbs.

Vērtēšana

Skolēni vērtē sava partnera darbu – identisko pārveidojumu pareizību, stāstījumu, atbildes uz jautājumiem, kā arī sadarbību pāra ietvaros; skolotājs secina no vērojumiem, ja uzskata par nepieciešamu – arī iepazīstoties ar skolēnu aizpildītajām vērtējuma lapām.

Skolotāja pašnovērtējums

Secina par stundas mērķa sasniegšanu, izmantoto metožu lietderību un efektivitāti, par to, kas izdevās un kādas problēmas rada šādas sadarbības realizēšana.

Stundas gaita

Stundā tiek risināti tradicionāli tipveida uzdevumi. Uzdevumus, to skaitu un grūtības pakāpi izvēlas skolotājs no uzdevumu krājuma vai mācību grāmatas, vai sagatavo darba lapu ar uzdevumiem katram skolēnam.

Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Uzdevumu risināšana (20 minūtes)	
Piedāvā skolēniem sadalīties pāros, lai stundas gaitā varētu kopīgi strādāt. Lūdz pāros pārdomāt atbildes uz jautājumiem: "Kādas izteiksmes sauc par identiski vienādām? Kādus algebrisko izteiksmju identiskos pārveidojumus skolēni prot veikt?" Norāda, ka atbildes var ilustrēt ar piemēriem. Pārrunā atbildes uz jautājumiem. Lūdz nosaukt "atslēgas vārdus" (jēdzienus), kas tiek lietoti, runājot par algebriskā izteiksmēm, identiskiem pārveidojumiem, pieraksta tos uz tāfeles, pārliecinās, vai skolēni saprot to jēgu.	Atrod sev sadarbības partneri pāru darbam. Atceras, ko jau zina un prot par identiskiem pārveidojumiem. Formulē atbildes uz jautājumiem, izdomā piemērus. Nosauc "atslēgas vārdus", pārliecinās, par jēdzienu izpratni, ja nepieciešams, veic pierakstus.

Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Norāda/izdala veicamos uzdevumus. Uzdevumiem ir divi varianti (A un B); skolēni, kuri ir vienā pāri, risina atšķirīgu variantu uzdevumus. <i>Iespējams variēt uzdevumu grūtības pakāpi dažādos pāros, ja izvēlas veidot pārus, kopā liekot skolēnus ar līdzīgām matemātiskajām prasmēm. Var izvēlēties pāros apvienot skolēnus ar dažādām prasmēm, lai viens otru varētu papildināt un kopīgi pilnveidotu risināšanas iemaņas.</i> Norāda, ka darbs veicams individuāli, nepieciešamības gadījumā konsultējoties tikai ar skolotāju, skolēni var izmantot iepriekš risināto uzdevumu paraugus, pierakstu klades, mācību grāmatas. Nosaka darba izpildes laiku. Vēro skolēnu darbu, ja nepieciešams, palīdz tikt galā ar kāda uzdevuma risinājumu. <i>Ja kādā pāri abi skolēni paveikuši individuālos uzdevumus, var atļaut sākt apspriešanu.</i>	Saņem uzdevumus, iepazīstas ar tiem. Individuāli risina uzdevumus. Ja nepieciešams, izmanto iepriekš risināto uzdevumu paraugus, pierakstu kladi, mācību grāmatas, konsultējas ar skolotāju.
Jautājumi un atbildes (20 minūtes)	
Aicina risināšanu beigt un ar savu uzdevumu risinājumiem iepazīstināt otru skolēnu – vispirms 7 minūtes A varianta risinātājs, pēc tam B varianta risinātājs. Kontrolē laika sadalījumu, seko, lai abi skolēni pagūtu izstāstīt risinājumus. <i>Vēlams nodrošināt skolēniem iespēju iepazīties ar atbildēm, iepriekš sagatavojot pareizos risinājumus, īpaši tad, ja iespējami dažādi risinājuma ceļi.</i> <i>Ja kāds pāris darbu veic ātrāk, var piedāvāt papilduzdevumu kopīgai atrisināšanai.</i>	Skaidro risinājumus otram skolēnam, atbild uz jautājumiem, pamato pārveidojumus.
Lūdz aizpildīt vērtējuma lapu par sava partnera veikumu, akcentējot pozitīvo. Aicina savstarpēji iepazīstināt sadarbības partneri ar vērtējumu un kopīgi novērtēt savstarpējo sadarbību. <i>Var lūgt vērtējuma darba lapas nodot, ja nepieciešams precizēt secinājumus par atsevišķu skolēnu un kopumā stundā paveikto.</i> Aicina skolēnus izteikties par problēmām un veismēm uzdevumu risināšanas gaitā un par to, kā skaidrojot veicās ar stundas sākumā nosaukto jēdzienu lietošanu.	Izvērtē partnera veikumu un aizpilda vērtējuma lapu. Iepazīstina viens otru ar vērtējumu. Ja nepieciešams, komentē; piekrīt vai apšaubā vērtējumu, vienojas par savstarpējās sadarbības novērtējumu. Izsakās par to, kas risinot uzdevumus izdevās labi, kas vēl sagādā grūtības, kā veicās ar risinājumu skaidrošanu, lietojot atbilstošos jēdzienus.

STUNDAS PIEMĒRS

AUGSTĀKU PAKĀPJU VIENĀDOJUMU ATRISINĀŠANAS IESPĒJAS

Mērķis

Iepazīstināt ar trešās pakāpes vienādojumu risināšanas paņēmieniem un vienādojumu atrisināšanas vēsturi, izmantojot darbu ar tekstu.

Skolēnam sasniedzamais rezultāts

- Ir izveidojis pārskatu par vienādojumu atrisināšanas metodēm, izmantojot doto tekstu.
- Atrisinā 3. pakāpes vienādojumu, izmantojot doto informāciju.

Nepieciešamie resursi

- Izdales materiāls (M_10_SP_07_02_P1), papildmateriāls (M_10_SP_07_02_P2).
- Kalkulators.

Mācību metodes

Darbs ar tekstu, uzdevumu risināšana.

Mācību organizācijas formas

Individuāls darbs, frontāls darbs, pāru darbs.

Vērtēšana

Skolotājs vērtē skolēnu prasmi iegūt un izmantot tekstā dotu informāciju, novērojot darba procesu, pēc skolēnu uzdotajiem jautājumiem, komentāriem un atbildēm uz jautājumiem; skolēni var novērtēt savu prasmi izmantot doto informāciju vienādojuma atrisināšanai, salīdzinot savu risinājumu ar paraugu.

Skolotāja pašnovērtējums

Secina par stundas mērķa sasniegšanu, izmantotās metodes lietderību un efektivitāti, par to, kas izdevās un kādiem jautājumiem būtu jāpievērš lielāka uzmanība.

Stundas gaita

Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Darbs ar tekstu (20 minūtes)	
Aktualizē zināmo par vienādojumiem un to atrisināšanu, uzdodot jautājumus par to, kādus vienādojumu veidus skolēni zina, vai skolēni spēj īsi aprakstīt katra vienādojumu veida atrisināšanas algoritmu, kādas vispārīgas vienādojumu atrisināšanas metodes viņi zina.	Iesaistās sarunā, atbild uz jautājumiem. <i>Vajadzētu stāstīt, ka viņi prot atrisināt lineāru vienādojumu, kvadrātvienādojumu gan ar sakņu formulu, gan izmantojot Vjeta teorēmu, lieto vienādojumu atrisināšanai substitūcijas metodi, sadalīšanu reizinātājos, grafisko metodi.</i>
Aicina skolēnus prognozēt viņu iespējas atrisināt trešās un ceturtās pakāpes vienādojumus.	Izsaka apsvērumus par iespējām atrisināt augstāku pakāpju vienādojumus. <i>Varētu nosaukt, ka dažu vienādojumu atrisināšanai varētu derēt substitūcijas metode, sadalīšana reizinātājos, grafiskā metode.</i>
Informē par stundas mērķi.	

Skolotāja darbība

Izdala tekstu un darba lapu. Informē, ka lasot tekstu, iepazīsies ar divām trešās pakāpes vienādojumu atrisināšanas iespējām (paņēmiem). Tekstā atrodamo metožu apraksti jāizmanto darba lapas aizpildīšanai.

Norāda, ka soļu skaits, aprakstot metodes, var būt dažāds, būtiski, lai varētu izmantot tabulu, turpmāk risinot citus vienādojumus. Nosaka uzdevuma izpildes laiku. *Pierakstu veikšanai var neizmantot darba lapas, tabulu veidojot pierakstu kladēs.*

Vada īsu sarunu, akcentējot būtiskākos soļus, kas jāveic, lietojot katru no metodēm. *Ja skolēni paši nenorāda, ka metode ļauj iegūt saknes tuvinātu vērtību, vajadzētu uzdot uzvedinošu jautājumu par saknes vērtību, saistot ar līdzšinējo pieredzi, kad vienādojuma atrisinājums parasti bija precīzs skaitlis.*

Noskaidro skolēnu viedokli par to, vai un kādos gadījumos saknes aptuvenās vērtības atrašana var būt pieņemams vienādojuma atrisināšanas rezultāts.

Skolēnu darbība

Individuāli lasa tekstu, cenšas izprast katras metodes būtību, lietošanas iespējas, trūkumus, izveido vienādojuma atrisināšanas plānu, izmantojot katru metodi. Aizpilda darba lapu.

Pārliecinās, vai uztvēruši būtiskāko, ja nepieciešams, papildina ierakstus darba lapā. Izsaka viedokli par vienādojuma saknes precizitātes nozīmi dažādās situācijās.

Uzdevumu risināšana (20 minūtes)

Aicina skolēnus atrisināt kubisko vienādojumu $x^3 - x + 2 = 0$, izmantojot vienu no metodēm – Kardano formulu vai grafisko paņēmieni. Uzdevumu veikšanai iesaka sadalīties pāros. Nosaka laiku.

Rosina izvēlēties dažādas metodes, lai nebūtu tā, ka kādu metodi neizmanto neviens pāris. Ja kāds pāris vienādojumu atrisina ātrāk, iesaka izmēģināt citu metodi.

Aicina salīdzināt risinājumus, novērtēt atrisinājumu pareizību. *Vēlams iepriekš sagatavot demonstrējamus atrisinājumu paraugus.*

Iesaka turpmāk pirms jaunapgūtās metodes izmantošanas pārliecināties, vai nav iespējams izmantot substitūcijas metodi vai sadalīšanu reizinātājos.

Lūdz vēlreiz izlasīt teksta pirmo rindkopu un atcerēties, ko vispār nozīmē atrisināt vienādojumu. Jautā vai skolēni nesaskata kādu trūkumu (problēmu) stundā veiktajā vienādojumu risināšanā saistībā ar šiem apsvērumiem.

Var apspriest iespēju iegūt augstākas pakāpes vienādojuma pārējās saknes, ja viena jau zināma, ņemot tomēr vērā, ka polinomu dalīšana nav apgūta. Var ieteikt vienu no saknēm uzminēt, kas dažos gadījumos var būt vienkāršāk nekā lietot kādu no speciālām metodēm.

Sadalās pāros. Izvēlas vienādojuma atrisināšanas metodi. Atrisina vienādojumu, izmantojot pierakstus darba lapā.

Komentē risinājumu, uzdod jautājumus, atbild uz jautājumiem, precizē, salīdzina, iepazīstas ar vienādojuma atrisinājumu ar citu metodi, izsaka viedokli par metožu izvēli, metodes efektivitāti.

Saskata, ka vienādojumu atrisināšanā īpaši netika pievērsta uzmanība atrisinājumu skaitam (netika pamatots, ka citu atrisinājumu nav) un Kardano formula vispār ļauj atrast tikai vienu sakni.

Iepazīstina skolēnus ar atsevišķiem faktiem no vienādojumu atrisināšanas vēstures, akcentējot Vjeta, Tartaljas, Kardano nopelnus. *Var lūgt skolēnus mājās iepazīties ar matemātikas vēstures materiāliem, lai nākamajā stundā to pastāstītu pārējiem – tematus vēlams sadalīt, var norādīt avotus.*

Aicina skolēnus izvērtēt stundā paveikto.

Iepazīstas ar matemātikas vēstures faktiem saistībā ar vienādojumu atrisināšanu. Pieraksta (izvēlas) tematu, materiālu ar ko mājās iepazīties.

Izsaka viedokli par stundā apgūto.

DVĪŅU SKAITĻI

Darba izpildes laiks 20 minūtes

M_10_LD_07

Mērķis

Pilnveidot izpratni par pierādījumu veidiem un prasmi formulēt secinājumus, izmantojot skaitļa pierakstu algebriskā formā.

Sasniedzamais rezultāts

- Pierāda vienādību.
- Izvērtē iegūtos rezultātus.

Saskata un klasificē lielumus, formulē pētāmo problēmu	Dots
Veido plānu	-
Iegūst un apstrādā informāciju	-
Formulē pieņēmumu/ hipotēzi	Dots
Veic pierādījumu	Mācās
Analizē un izvērtē rezultātus, secina	Mācās
Prezentē darba rezultātus	-
Sadarbojas, strādājot grupā (pārī)	-

Situācijas apraksts

Kādam studentam patika „spēlēties” ar skaitļiem. Viņš izvēlējās naturālu skaitli A , kas nedalās ar 10, un uzrakstīja tā *spoguļattēlu* – skaitli A_s . Par *spoguļattēlu* viņš nosauca skaitli, ko iegūst, uzrakstot dotā skaitļa ciparus apgrieztā secībā, piemēram, $A = 246$ un $A_s = 642$.

Skaitļus A un B viņš nosauca par *dvīņiem*, ja izpildījās šāda sakarība:
 $A \cdot B = A_s \cdot B_s$. Piemēram, *dvīņi* ir $A = 462$ un $B = 396$, jo $A_s = 264$, $B_s = 693$ un $462 \cdot 396 = 264 \cdot 693$.

Students nolēma pētīt divciparu dvīņu skaitļus.

No iespējamām **pētāmām problēmām** viņš izvēlējās:

Kāda ir sakarība starp dvīņu skaitļu cipariem?

Lai atrastu atbildi, students aplūkoja dažus divciparu dvīņu skaitļus 42 un 36, 24 un 21, 43 un 68, 96 un 23, 63 un 12. Viņam ilgi neizdevās ieraudzīt sakarību starp šo skaitļu cipariem, līdz viņam ienāca prātā uzrakstīt dvīņu skaitļus vienu zem otra:

$$\begin{array}{r} 42 \\ 36 \\ \hline 1212 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \\ 21 \\ \hline 44 \end{array} \quad \begin{array}{r} 43 \\ 68 \\ \hline 2424 \end{array} \quad \begin{array}{r} 96 \\ 23 \\ \hline 1818 \end{array} \quad \begin{array}{r} 63 \\ 12 \\ \hline 66 \end{array}.$$

Tas, ko viņš ievēroja un pierakstīja zem dvīņu skaitļiem, ļāva studentam formulēt **hipotēzi** –

divciparu dvīņu skaitļu pirmo ciparu reizinājums ir vienāds ar otro ciparu reizinājumu.

Hipotēzes pierādījums

Skolotājs rosina sākt ar iespējamo pierādījumā izmantojamo faktu, metožu pārdomāšanu. Ja skolēniem pašiem tas neizdodas, var palīdzēt, jautājot:

- kā vispārīgā veidā var pierakstīt skaitli, ja zināmi tā cipari,
- kas ir dots, kas jāpierāda u.tml.

Skaitli, kura pirmais cipars ir a , otrais ir b , var pierakstīt formā $10a + b$, savukārt tā spoguļattēls ir skaitlis $10b + a$. Skaitli, kura pirmais cipars ir c , otrais ir d , var pierakstīt formā $10c + d$, bet spoguļattēlu $10d + c$. Ja šie abi ir dvīņu skaitļi, tad ir patiesa šāda vienādība:

$$(10a + b)(10c + d) = (10b + a)(10d + c).$$

Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūst vienādību $ac = bd$.

Rezultātu analīze, izvērtējums, secinājumi

Skolotājs rosina rakstīt par šāda veida pierādījumu izmantošanas citām iespējām, tālāko pētījumu iespējām.

Vēlams skolēnu secinājumus, ierosinājumus pārrunāt. Šajā darbā nozīmīga ir prasme skaitļu pierakstīšanai izmantot algebriskas izteiksmes, ne tik daudz pats pierādītais fakts. Ja skolēnus ieinteresējusi konkrētā problēma, ir iespējas to paplašināt (piemēram, pētīt trīsciparu dvīņu skaitļus, meklēt visus iespējamus divciparu dvīņus, izvērtēt apgrieztos apgalvojumus).

RACIONĀLU ALGEBRISKU IZTEIKSMJU IDENTISKIE PĀRVEIDOJUMI

Vērtētāja vārds

Risinātāja vārds

Uzdevuma numurs	Vērtējums par			Risinātāja komentārs par savu darbu
	atrisinājumu (pareizs/daļēji atrisināts/nepareizs/nav risināts/nezinu)	stāstījumu (skaidrs/daļēji izprotams/trūkst pamatojuma/nav stāstījuma)	atbildēm uz jautājumiem (saprotamas/nevar paskaidrot/nebija jautājumu)	
1.				
2.				
3.				

Savstarpējās sadarbības vērtējums:

Vērtētāja paraksts:

Risinātāja paraksts:

✂

RACIONĀLU ALGEBRISKU IZTEIKSMJU IDENTISKIE PĀRVEIDOJUMI

Vērtētāja vārds

Risinātāja vārds

Uzdevuma numurs	Vērtējums par			Risinātāja komentārs par savu darbu
	atrisinājumu (pareizs/daļēji atrisināts/nepareizs/nav risināts/nezinu)	stāstījumu (skaidrs/daļēji izprotams/trūkst pamatojuma/nav stāstījuma)	atbildēm uz jautājumiem (saprotamas/nevar paskaidrot/nebija jautājumu)	
1.				
2.				
3.				

Savstarpējās sadarbības vērtējums:

Vērtētāja paraksts:

Risinātāja paraksts:

TREŠĀS PAKĀPES VIENĀDOJUMU ATRISINĀŠANA

Trešās pakāpes vienādojumu var pārveidot formā $ax^3 + ax^2 + cx + d = 0$, ceturtais pakāpes vienādojumu – formā $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, kur a, b, c utt. – kaut kādi skaitļi, pie tam $a \neq 0$. Var pierādīt, ka trešās pakāpes vienādojumam ir ne vairāk kā trīs saknes, ceturtais pakāpes vienādojumam – ne vairāk kā četras saknes. Vispār – n -tās pakāpes vienādojumam ir ne vairāk kā n saknes.

Gan trešās, gan ceturtais pakāpes vienādojumiem ir zināmas sakņu formulas, taču šīs formulas ir samērā sarežģītas. Piektās un arī augstākas pakāpes vienādojumiem nav vispārīgu formulu sakņu aprēķināšanai. Trešās un arī augstāku pakāpju vienādojumus iespējams atrisināt, pielietojot kādu speciālu paņēmienu. Dažus vienādojumus ir izdevīgi risināt, izmantojot polinoma sadalīšanu reizinātājos, substitūcijas metodi.

Daudziem vienādojumiem, arī augstāku pakāpju, viegli noteikt sakņu aptuvenās vērtības, izmantojot grafisko paņēmienu.

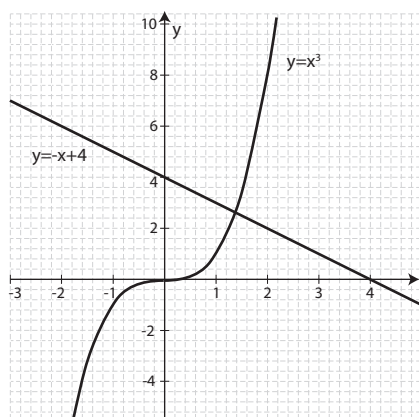
Piemērs.

Uzdevums: atrisināt vienādojumu $x^3 + x - 4 = 0$.

Risinājums.

Doto vienādojumu izsaka formā $x^3 = -x + 4$.

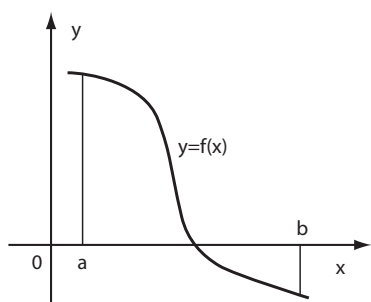
Konstruē vienā koordinātu sistēmā funkciju $y = x^3$ un $y = -x + 4$ grafikus.



1. zīm.

Kā redzams 1. zīm., grafiki krustojas vienā punktā (viena no funkcijām ir augoša visā definīcijas apgabalā, otra – dilstoša). Grafiku krustpunkta abscisa ir aptuveni vienāda ar 1,4. Tātad vienādojumam ir tikai viena sakne $x \approx 1,4$.

Jāpiebilst, ka grafiskais paņēmiens neuzrāda rezultātu ar pietiekamu precizitāti. Ja nepieciešams atrast sakņu vērtības ar lielāku precizitāti, tad grafiski noteiktās sakņu aptuvenās vērtības var precizēt, veicot skaitliskus aprēķinus.



2. zīm.

Vesela vienādojuma sakņu vērtības var precizēt saskaņā ar šādu apgalvojumu: funkcijas $y = f(x)$, kur $f(x)$ ir polinoms, grafiks ir nepārtraukta līnija. No tā savukārt izriet šāds secinājums: ja kādā intervālā $[a, b]$ galapunktos funkcijas vērtības ir ar dažādām zīmēm, tad minētajā intervālā noteikti ir sakne $f(x) = 0$.

Precizēsim vienādojuma $x^3 + x - 4 = 0$ atrasto saknes vērtību. No grafiku konstrukcijas redzams (1. zīm.), ka šī vienādojuma sakne pieder pie intervāla $[1; 2]$. Par to var pārliecināties, aprēķinot funkcijas $f(x) = x^3 + x - 4$ vērtības, ja $x = 1$ un $x = 2$.

Iegūst, ka $f(1) = -2 < 0$, bet $f(2) = 6 > 0$.

Sadala 10 vienādās daļās koordinātu taisnes nogriežni, kura galapunkti ir 1 un 2: 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; ...; 1,8; 1,9; 2,0.

Aprēķina funkcijas $f(x) = x^3 + x - 4$ vērtības, kas atbilst norādītajām argumenta x vērtībām tik ilgi, kamēr atrod to 0,1 vienības garo intervālu, kura galapunktos dotās funkcijas vērtības ir ar dažādām zīmēm. Šajā nolūkā ērti izmantot kalkulatoru.

Tādējādi atrod, ka $f(1,3) = -0,503 < 0$, bet $f(1,4) = 0,144 > 0$. Tas nozīmē, ka vienādojuma saknes pieder pie intervāla $[1,3; 1,4]$. Par decimālo tuvinājumu ar precizitāti līdz 0,1 var izvēlēties katru no skaitļiem 1,3 vai 1,4.

Lai noteiktu saknes ar vēl lielāku precizitāti, tad 10 vienādās daļās jāsadala koordinātu taisnes nogrieznis, kura galapunkti ir 1,3 un 1,4. Pēc tam aprēķina funkcijas vērtības, ja x ir 1,30; 1,31; 1,32; ...; 1,38; 1,39; 1,40.

Iegūst, ka $f(1,37) = -0,058647 < 0$, bet $f(1,38) = 0,008072 > 0$. Tātad sākotnējā vienādojuma sakne pieder pie intervāla $[1,37; 1,38]$. Par decimālo tuvinājumu ar precizitāti līdz 0,01 var izvēlēties katru no skaitļiem 1,37 vai 1,38.

Analoģiski var atrast vienādojuma sakņu decimālos tuvinājumus ar precizitāti līdz 0,001; 0,0001 utt.

Vienādojuma $x^3 + x - 4 = 0$ saknes var noteikt arī pēc Kardan formulas.

Ja trešās pakāpes vienādojums ir kanoniskajā formā $y^3 + py + q = 0$, tad

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Vienādojumam $x^3 + x - 4 = 0$ koeficienti $p = 1$ un $q = -4$, tad

$$x = \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{1^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{1^3}{27}}} \approx 1,3787967.$$

Vispārīgajam trešās pakāpes vienādojumam $ax^3 + ax^2 + cx + d = 0$ sakni ar Kardano formulu var noteikt, ja to pārveido kanoniskajā formā, aizstājot $x = y - \frac{b}{3a}$ un iegūstot vienādojumu $y^3 + py + q = 0$, kur $p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}$ un $q = \frac{2b^3}{27a^3} + \frac{bc}{3a^2} - \frac{d}{a}$.

Vārds

uzvārds

klase

datums

Uzdevums

Iepazīsties ar divām trešās pakāpes vienādojumu atrisināšanas metodēm, izdomā tām nosaukumu un aizpildi tabulu!

Metodes nosaukums		
Kādos gadījumos šo metodi var lietot?		
Metodes trūkumi.		
Darbību secība.		

VIENĀDOJUMU ATRISINĀŠANAS VĒSTURE

Ferrari (*Ferrari*) Ludoviko (1522 – 1565) – itāļu matemātiķis. Atradis ceturrtās pakāpes vienādojuma vispārējo atrisinājumu.

Ferro (*del Ferro*) Scipions (1465 – 1526) – itāļu matemātiķis. Noskaidrojis paņēmieni, kā atrisināt kubvienādojumu $x^3 + mx = n$.

Anjezi (*Agnesie*) Marija Gaetana (1718 – 1799) – itāļu matemātiķe. Grāmatā “Analīzes pamati” (1748) pierādījusi, ka jebkuram kubvienādojumam ir trīs saknes.

Haijams Omārs (1048 – ~1123) – persiešu dzejnieks, filozofs, astronoms un matemātiķis. Klasificējis vienādojumus un izveidojis pirmo 3 pakāpju vienādojumu risināšanas teoriju.

Hariots (*Harriot*) Tomass (1560 – 1621) – angļu matemātiķis. Attīstījis algebras simboliku, ieviesis zīmes $>$ un $<$, pierakstījis vienādojumus formā, kas tuva mūsdienu pierakstam. Pirmais ievērojis, ka vienādojuma sakņu skaitu nosaka vienādojuma pakāpe.

Hērons (~1. gs. p. m. ē.) – sengrieķu zinātnieks. (..) Aprakstījis kvadrātvienādojuma skaitlisko atrisināšanu, kvadrātsakņu un kubsakņu aptuvenu aprēķināšanu.

Horezmī al Muhameds Ben Musa (9. gs.) – uzbeku matemātiķis, astronoms, ģeogrāfs. Aplūkojis pirmās un otrās pakāpes vienādojumu dažādus tipus. (..)

Horners (*Horner*) Viljams Džordžs (1786 – 1837) – angļu matemātiķis. Publicējis polinoma reālo sakņu tuvinātas aprēķināšanas paņēmieni. Hornera vārdā nosaukta shēma polinoma dalīšanai ar binomu $x - a$.

Kardano (*Cardano*) Džeromino (1501 – 1676) – itāļu matemātiķis, filozofs, ārsts. Pirmais publicējis formulu trešās pakāpes vienādojumu atrisināšanai, tādējādi izraisot asu diskusiju ar N. Tartalju. Viens no pirmajiem Eiropā pieļāvis vienādojumu negatīvo sakņu eksistenci.

Tartalja (*Tartaglia*) Nikolo (~1499 – 1557) – itāļu matemātiķis. Noskaidrojis 3. pakāpes vienādojuma vispārīgo atrisinājumu, ko publicēja Dž. Kardano. Šis fakts radīja vienu no lielākajiem skandāliem matemātikas vēsturē. Publicējis arī binomiālo koeficientu tabulas. Norādījis, ka šāviņa lidojuma trajektorija ir parabola un tā sasniedz vislielāko attālumu, ja to izšauj 45° leņķī.

Vans Sjao Tuns (7. gs.) – ķīniešu astronoms un matemātiķis. Risinot ģeometriskus uzdevumus, ieguvis trešās pakāpes vienādojumus $x^3 + px^2 = q$ un $x^3 + ax^2 + bx = c$. Kaut arī atrisinājumi noteikti pareizi, risināšanas metode netiek atklāta.

(Briedis Z. Izcilie matemātiķi. – Rīga: Zvaigzne, 1990)

FRANSUĀ VJETS (VIETE) (1540 – 1603)

Fransuā Vjets ir izcilākais franču 16. gadsimta matemātiķis. Dažkārt Vjetu dēvē par mūsdienu simboliskās algebras tēvu, jo viņš daudz darba ieguldījis burtu apzīmējumu izveidošanā.

Pēc profesijas Fransuā Vjets bija jurists, brīvo laiku viņš veltīja matemātikai. Savas darbības sākumā Vjets bija parlamenta padomnieks Bretaņā, pēc tam kalpoja karaļa Indriķa III un Indriķa IV galmā. Te līdztekus kārtējiem darbiem izpauzās Vjeta spējas slepeno ziņojumu atšifrēšanā. (..) Jau jaunībā Fransuā Vjets iepazinās ar Kopernika mācību par heliocentrisko sistēmu un sāka interesēties par astronomiju. Šī aizraušanās lika jauneklīm nodarboties ar trigonometriju un algebru. Pamazām šīs nozares viņam kļuva par galvenajām, un rezultātā Vjets kļuva par jauna attīstības ceļa iesācēju algebrā.

1545. gadā iznāca itāļu matemātiķa Dž. Kardano darbs “Lielā māksla jeb Par algebras likumiem”. Šajā grāmatā saglabājās arābu tradīcija pārveidot katru vienādojumu tā, lai tajā būtu tikai pozitīvi locekļi. Kardano izmantoja jau senāk iegūtos vienādojumus, vēl aplūkoja 4. pakāpes un dažus augstāku pakāpju vienādojumus, tādējādi iegūstot 66 dažāda veida vienādojumus. Katram no tiem bija savs atrisināšanas paņēmieni, un algebra kļuva neizsakāmi sarežģīta.

Fransuā Vjets stājās pie vienādojumu apvienošanas un vispārīnāšanas. Viņš izveidoja burtu apzīmējumus gan pozitīviem, gan arī negatīviem lielumiem. Jaunā simboliskā valoda kā analīzes līdzeklis ļāva ātri visus nosacījumus ietvert burtu formulās. 1591. gadā iznāca Vjeta grāmata “Ievads analīzes mākslā” (“In artem analyticam isagoge”). Tās sākumā ir ievads, kurā izskaidrota analīzes nozīme, uzsverot, ka tā ir metode matemātisku jautājumu atrisināšanai un teorēmu pierādīšanai.

Vienādojumos Vjets dotos lielumus apzīmēja ar līdzskaņiem, meklējamos – ar patskaņiem. (..) Vjets lietoja darbību zīmes (+ un –) mūsdienu nozīmē, bez tam viņš ir ieviesis arī jēdzienu “koeficients”. (..)

Matemātikas kursā vidusskolā pazīstamā Vjeta teorēma par sakarībām starp kvadrātvienādojuma koeficientiem un tā saknēm pirmo reizi formulēta 1591. gadā: ja $B + D$ reizināts ar A mīnus A^2 vienāds ar BD , tad A vienāds ar B un vienāds ar D . Te jāatceras, ka A (patskanis) apzīmē x , bet B un D (līdzskaņi) apzīmē koeficientus.

Tātad (ar mūsdienu apzīmējumiem), ja $(a + b)x - x^2 = ab$, t.i., $x^2 - (a + b)x + ab = 0$, tad $x_1 = a$, $x_2 = b$.

Jāuzsver, ka Fransuā Vjets šo teorēmu vispārīnājis arī augstāku pakāpju vienādojumiem.

(Briedis Z. Izcilie matemātiķi. – Rīga: Zvaigzne, 1990)

Vārds

uzvārds

klase

datums

DVĪŅU SKAITĻI

Situācijas apraksts

Kādam studentam patika “spēlēties” ar skaitļiem. Viņš izvēlējās naturālu skaitli A , kas nedalās ar 10, un uzrakstīja tā *spoguļattēlu* – skaitli A_s . Par *spoguļattēlu* viņš nosauca skaitli, ko iegūst, uzrakstot dotā skaitļa ciparus apgrieztā secībā, piemēram,

$A = 246$ un $A_s = 642$.

Skaitļus A un B viņš nosauca par *dvīņiem*, ja izpildījās šāda sakarība:

$A \cdot B = A_s \cdot B_s$. Piemēram, *dvīņi* ir $A = 462$ un $B = 396$, jo $A_s = 264$,

$B_s = 693$ un $462 \cdot 396 = 264 \cdot 693$. Students nolēma pētīt divciparu dvīņu skaitļus.

No iespējamām **pētāmām problēmām** viņš izvēlējās: Kāda ir sakarība starp dvīņu skaitļu cipariem?

Lai atrastu atbildi, students aplūkoja dažus divciparu dvīņu skaitļus 42 un 36, 24 un 21, 43 un 68, 96 un 23, 63 un 12. Viņam ilgi neizdevās ieraudzīt sakarību starp šo skaitļu cipariem, līdz viņam ienāca prātā uzrakstīt dvīņu skaitļus vienu zem otra:

42	24	43	96	63
<u>36</u>	<u>21</u>	<u>68</u>	<u>23</u>	<u>12</u>
1212	44	2424	1818	66

Tas, ko viņš ievēroja un pierakstīja zem dvīņu skaitļiem, ļāva studentam formulēt **hipotēzi** – divciparu dvīņu skaitļu pirmo ciparu reizinājums ir vienāds ar otro ciparu reizinājumu.

Hipotēzes pierādījums

Rezultātu analīze, izvērtējums, secinājumi

Vārds

uzvārds

klase

datums

IZTEIKSMJU PĀRVEIDOJUMI

1. uzdevums (1 punkts)

Pārveido izteiksmi $\frac{2x+4}{2}$ par summu!

2. uzdevums (1 punkts)

Pārveido izteiksmi x^3-4x^2+4x par četru monomu summu!

3. uzdevums (2 punkti)

Pārveido izteiksmi x^3-4x^2+4x par triju reizinātāju reizinājumu!

4. uzdevums (3 punkti)

Pārveido izteiksmi x^4-5x^2+4 par četru reizinātāju reizinājumu!

5. uzdevums (4 punkti)

Pārveido izteiksmi $\left(\frac{x^4-1}{x^2+1}\right)$ par polinomu!

Vārds

uzvārds

klase

datums

IDENTISKAS IZTEIKSMES

1. uzdevums (8 punkti)

Nosaki, vai dotās izteiksmes ir identiski vienādas! Atbilde pamato!

a) $\frac{x-2}{x+3}$ un $\frac{2-x}{-x-3}$

b) $\frac{x-2}{x+3}$ un $\frac{2x-4}{x+3}$

c) $\frac{x-2}{x+3}$ un $\frac{(x-2) \cdot (x-3)}{x^2-9}$

d) $\frac{x-2}{x+3}$ un $\frac{(x-2) \cdot (x^2+1)}{(x+3) \cdot (x^2+1)}$

2. uzdevums (2 punkti)

Uzraksti izteiksmi, kas ir identiski vienāda ar izteiksmi $\frac{x+4}{x}$!

3. uzdevums (3 punkti)

Nosaki a un b vērtības, ja zināms, ka izteiksmes $x^2-ax+11$ un $(x-b)^2+2$ ir identiski vienādas!

Vārds

uzvārds

klase

datums

DAĻVEIDA VIENĀDOJUMI

Uzdevums (6 punkti)

Doti divi vienādojumi un to atrisinājumi. Pārbaudi, vai risinājums ir pareizs! Labajā pusē komentē risinājuma gaitu un, ja nepieciešams, labo to!

a) $\frac{x^2-6}{x} = \frac{3+2x}{2}$

$$\frac{2(x^2-6)-x(3+2x)}{2x} = 0$$
$$\frac{-12-3x}{2x} = 0$$

$$\begin{cases} -12-3x=0 \\ 2x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Atbilde: $x = -4$

b) $\frac{x-1}{x^2-5x+4} = 2$

$$x-1 = 2(x^2-5x+4)$$
$$2x^2-11x+9=0$$
$$x_1=4,5; x_2=1$$

Atbilde: $x_1=4,5; x_2=1$

Vārds

uzvārds

klase

datums

ALGEBRISKAS IZTEIKSMES UN VIENĀDOJUMI

1. variants

1. uzdevums (4 punkti)

Pasvīturo pareizo atbildi!

a) Vienādojuma $\frac{x+2}{x-1}=0$ atrisinājums ir:

$$x=2 \text{ un } x=-1$$

$$x=-2$$

$$x=-2 \text{ un } x=1$$

$$x=1$$

b) Izteiksmi x^3+27 sadalot reizinātājos, iegūst:

$$(x+3)(x^2+3x+9)$$

$$(x-3)(x^2+3x+9)$$

$$(x-3)(x^2+3x-9)$$

$$(x+3)(x^2-3x+9)$$

c) Izteiksmei $2x+\frac{2}{x}$ identiska izteiksme ir:

$$2x+3$$

$$2x^2+3$$

$$\frac{2x^2+3}{x}$$

$$4x+\frac{6}{x}$$

d) Izteiksmes $\frac{x-5}{x+7}$ definīcijas apgabals ir:

$$x \in (-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$$

$$x \in (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$$

$$x \in (-\infty; -7) \cup (-7; +\infty)$$

$$x \in (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$$

2. uzdevums (3 punkti)

Sadali doto izteiksmi trīs lineāros reizinātājos!

$$x^3-5x^2-4x+20$$

3. uzdevums (3 punkti)

Atrisini vienādojumu!

$$|2x+3|=3$$

4. uzdevums (5 punkti)

Atrisini vienādojumu!

$$(x^3-3)^2+7(x^3-3)-4=0$$

5. uzdevums (3 punkti)

Uzvalka cena bija a lati. Vispirms tā cenu paaugstināja par 20 %, bet pēc tam cenu paaugstināja vēl par 25 %. Uzraksti izteiksmi, kas izsaka uzvalka cenu pēc abām cenu paaugstināšanām! Vienkāršo iegūto izteiksmi!

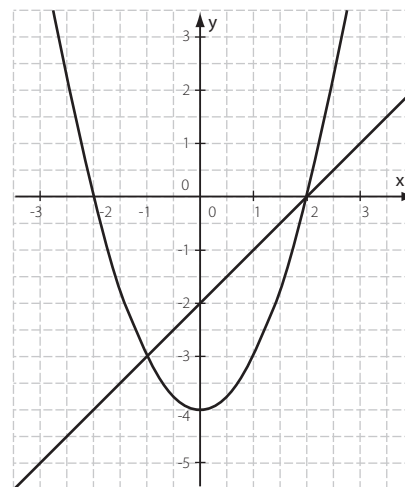
6. uzdevums (5 punkti)

Dots kvadrāts un regulārs trijstūris. Trijstūra mala ir par 2 cm garāka nekā kvadrāta mala. Kādiem jābūt figūru malu garumiem, lai šo figūru perimetru starpība būtu 3 cm?

7. uzdevums (4 punkti)

Doti divu funkciju $y=x^2-4$ un $y=x-2$ grafiki.

- a) Izmantojot zīmējumu, nosaki vienādojuma $x^2-4=x-2$ saknes un pārbaudi tās!



- b) Uzraksti vienu a vērtību, ar kuru vienādojumam $x^2-4=x+a$ nav sakņu; atbildi pamato!

8. uzdevums (3 punkti)

Nosaki, ar kādām a vērtībām dotie vienādojumi ir ekvivalenti!

$$\frac{x^2-a}{x-2}=0 \text{ un } \frac{x^2-a}{x-3}=0$$

Vārds

uzvārds

klase

datums

ALGEBRISKAS IZTEIKSMES UN VIENĀDOJUMI

2. variants

1. uzdevums (4 punkti)

Pasvītro pareizo atbildi!

a) Vienādojuma $\frac{x-3}{x+1}=0$ atrisinājums ir:

$x=3 \text{ un } x=-1$

$x=-1$

$x=-3 \text{ un } x=1$

$x=3$

b) Izteiksmi x^3-8 sadalot reizinātājos, iegūst:

$(x-2)(x^2-2x+4)$

$(x-2)(x^2+2x+4)$

$(x-2)(x^2-2x-4)$

$(x+2)(x^2-2x+4)$

c) Izteiksmei $3y+\frac{2}{y}$ identiska izteiksme ir:

$3y-2$

$\frac{3y^2-2}{y}$

$6y+\frac{4}{y}$

$3y^2-2$

d) Izteiksmes $\frac{x+6}{x-4}$ definīcijas apgabals ir:

$x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$

$x \in (-\infty; 6) \cup (6; +\infty)$

$x \in (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$

$x \in (-\infty; -6) \cup (-6; +\infty)$

2. uzdevums (3 punkti)

Sadali doto izteiksmi trīs lineāros reizinātājos!

$x^3+2x^2-9x+18$

3. uzdevums (3 punkti)

Atrisini vienādojumu!

$|2x-5|=5$

4. uzdevums (5 punkti)

Atrisini vienādojumu!

$$(x^3+3)^2-9(x^3+3)-22=0$$

5. uzdevums (3 punkti)

Mēteļa cena bija x lati. Vispirms tā cenu paaugstināja par 25 %, bet pēc tam cenu paaugstināja vēl par 20 %. Uzraksti izteiksmi, kas izsaka mēteļa cenu pēc abām cenu paaugstināšanām! Vienkāršo iegūto izteiksmi!

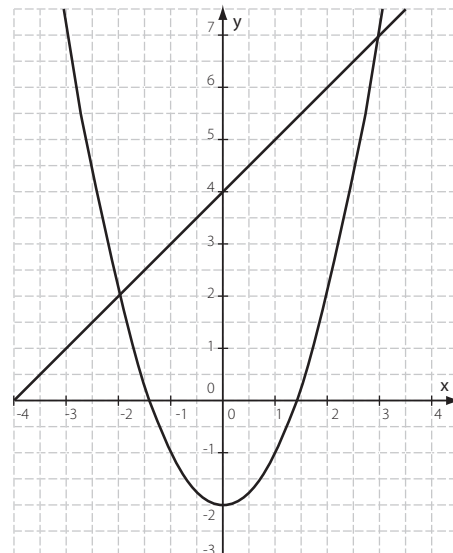
6. uzdevums (5 punkti)

Dots regulārs trijstūris un kvadrāts. Kvadrāta mala ir par 3 cm īsāka nekā trijstūra mala. Kādiem jābūt figūru malu garumiem, lai šo figūru perimetru starpība būtu 2 cm?

7. uzdevums (4 punkti)

Doti divu funkciju $y=x^2-2$ un $y=x+4$ grafiki.

- a) Izmantojot zīmējumu, nosaki vienādojuma $x^2-2=x+4$ saknes un pārbaudi tās!



- b) Uzraksti vienu a vērtību, ar kuru vienādojumam $x^2-2=x+a$ nav sakņu; atbilde pamato!

8. uzdevums (3 punkti)

Nosaki, ar kādām a vērtībām dotie vienādojumi ir ekvivalenti!

$$\frac{x^2-a}{x-4}=0 \text{ un } \frac{x^2-a}{x-1}=0$$

ALGEBRISKAS IZTEIKSMES UN VIENĀDOJUMI

1. variants

1. uzdevums (4 punkti)

Pasvīturo pareizo atbildi!

a) Vienādojuma $\frac{x+2}{x-1}=0$ atrisinājums ir:

$x=2$ un $x=-1$ $x=-2$ $x=-2$ un $x=1$ $x=1$

b) Izteiksmi x^3+27 sadalot reizinātājos, iegūst:

$(x+3)(x^2+3x+9)$ $(x-3)(x^2+3x+9)$

$(x-3)(x^2+3x-9)$ $(x+3)(x^2-3x+9)$

c) Izteiksmei $2x+\frac{2}{x}$ identiska izteiksme ir:

$2x+3$ $2x^2+3$ $\frac{2x^2+3}{x}$ $4x+\frac{6}{x}$

d) Izteiksmes $\frac{x-5}{x+7}$ definīcijas apgabals ir:

$x \in (-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$ $x \in (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$
 $x \in (-\infty; -7) \cup (-7; +\infty)$ $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$

2. uzdevums (3 punkti)

Sadali doto izteiksmi trīs lineāros reizinātājos!

$x^3-5x^2-4x+20$

3. uzdevums (3 punkti)

Atrisini vienādojumu!

$|2x+3|=3$

4. uzdevums (5 punkti)

Atrisini vienādojumu!

$(x^3-3)^2+7(x^3-3)-4=0$

5. uzdevums (3 punkti)

Uzvalka cena bija a lati. Vispirms tā cenu paaugstināja par 20 %, bet pēc tam cenu paaugstināja vēl par 25 %. Uzraksti izteiksmi, kas izsaka uzvalka cenu pēc abām cenu paaugstināšanām! Vienkāršo iegūto izteiksmi!

6. uzdevums (5 punkti)

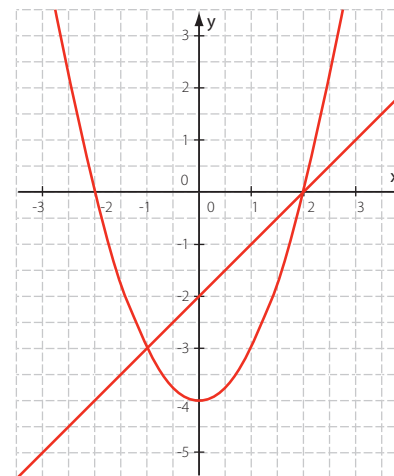
Dots kvadrāts un regulārs trijstūris. Trijstūra mala ir par 2 cm garāka nekā kvadrāta mala. Kādiem jābūt figūru malu garumiem, lai šo figūru perimetru starpība būtu 3 cm?

7. uzdevums (4 punkti)

Doti divu funkciju $y=x^2-4$ un $y=x-2$ grafiki.

a) Izmantojot zīmējumu, nosaki vienādojuma $x^2-4=x-2$ saknes un pārbaudi tās!

b) Uzraksti vienu a vērtību, ar kuru vienādojumam $x^2-4=x+a$ nav sakņu; atbildi pamato!



8. uzdevums (3 punkti)

Nosaki, ar kādām a vērtībām dotie vienādojumi ir ekvivalenti!

$\frac{x^2-a}{x-2}=0$ un $\frac{x^2-a}{x-3}=0$

ALGEBRISKAS IZTEIKSMES UN VIENĀDOJUMI

2. variants

1. uzdevums (4 punkti)

Pasvīturo pareizo atbildi!

a) Vienādojuma $\frac{x-3}{x+1}=0$ atrisinājums ir:

$$x=3 \text{ un } x=-1 \qquad x=-1 \qquad x=-3 \text{ un } x=1 \qquad x=3$$

b) Izteiksmi x^3-8 sadalot reizinātājos, iegūst:

$$(x-2)(x^2-2x+4) \qquad (x-2)(x^2+2x+4)$$

$$(x-2)(x^2-2x-4) \qquad (x+2)(x^2-2x+4)$$

c) Izteiksmei $3y+\frac{2}{y}$ identiska izteiksme ir:

$$3y-2 \qquad \frac{3y^2-2}{y} \qquad 6y+\frac{4}{y} \qquad 3y^2-2$$

d) Izteiksmes $\frac{x+6}{x-4}$ definīcijas apgabals ir:

$$\begin{aligned} x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty) & \qquad x \in (-\infty; 6) \cup (6; +\infty) \\ x \in (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty) & \qquad x \in (-\infty; -6) \cup (-6; +\infty) \end{aligned}$$

2. uzdevums (3 punkti)

Sadali doto izteiksmi trīs lineāros reizinātājos!

$$x^3+2x^2-9x+18$$

3. uzdevums (3 punkti)

Atrisini vienādojumu!

$$|2x-5|=5$$

4. uzdevums (5 punkti)

Atrisini vienādojumu!

$$(x^3+3)^2-9(x^3+3)-22=0$$

5. uzdevums (3 punkti)

Mēteļa cena bija x lati. Vispirms tā cenu paaugstināja par 25 %, bet pēc tam cenu paaugstināja vēl par 20 %. Uzraksti izteiksmi, kas izsaka mēteļa cenu pēc abām cenu paaugstināšanām! Vienkāršo iegūto izteiksmi!

6. uzdevums (5 punkti)

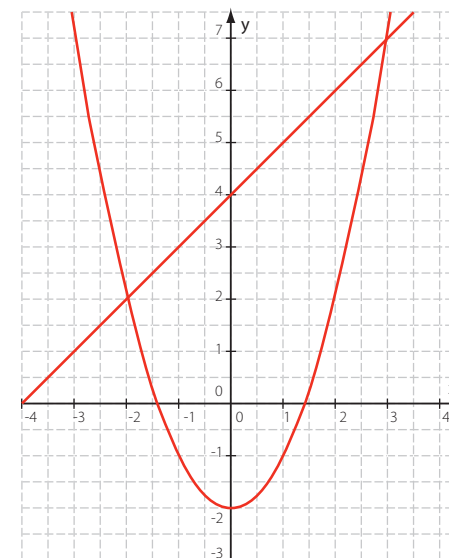
Dots regulārs trijstūris un kvadrāts. Kvadrāta mala ir par 3 cm īsāka nekā trijstūra mala. Kādiem jābūt figūru malu garumiem, lai šo figūru perimetru starpība būtu 2 cm?

7. uzdevums (4 punkti)

Doti divu funkciju $y=x^2-2$ un $y=x+4$ grafiki.

a) Izmantojot zīmējumu, nosaki vienādojuma $x^2-2=x+4$ saknes un pārbaudi tās!

b) Uzraksti vienu a vērtību, ar kuru vienādojumam $x^2-2=x+a$ nav sakņu; atbildi pamato!



8. uzdevums (3 punkti)

Nosaki, ar kādām a vērtībām dotie vienādojumi ir ekvivalenti!

$$\frac{x^2-a}{x-4}=0 \text{ un } \frac{x^2-a}{x-1}=0$$

ALGEBRISKAS IZTEIKSMES UN VIENĀDOJUMI

Vērtēšanas kritēriji

Uzdevums	Kritēriji	Punkti
1.	Nosaka daļveida vienādojuma sakni – 1 punkts	4
	Kubu summu (starpību) sadala reizinātājos – 1 punkts	
	Nosaka dotajai izteiksmei identisku izteiksmi – 1 punkts	
	Nosaka dotās izteiksmes definīcijas apgabalu – 1 punkts	
2.	Sagrupē saskaitāmos – 1 punkts	3
	Sadala izteiksmi divos reizinātājos – 1 punkts	
	Lieto kvadrātu starpības formulu – 1 punkts	
3.	Izprot, kas ir modulis – 1 punkts	3
	Atrisina vienu lineāro vienādojumu – 1 punkts	
	Atrisina otru lineāro vienādojumu – 1 punkts	
4.	Izveido vienādojumu ar jaunu nezināmo, lietojot substitūciju – 1 punkts	5
	Atrisina kvadrātvienādojumu attiecībā pret jauno nezināmo – 1 punkts	
	Izveido divus trešās pakāpes vienādojumus – 1 punkts	
	Atrisina vienu trešās pakāpes vienādojumu – 1 punkts	
	Atrisina otru trešās pakāpes vienādojumu – 1 punkts	
5.	Uzraksta izteiksmi, kas izsaka cenu pēc pirmās paaugstināšanas – 1 punkts	3
	Izsaka ar izteiksmi otro cenas paaugstinājumu – 1 punkts	
	Vienkāršo izteiksmi, kas izsaka cenu pēc otrās paaugstināšanas – 1 punkts	
6.	Figūru malas izsaka ar mainīgo – 1 punkts	5
	Uzraksta vienādojumu ar moduli vai divus lineārus vienādojumus – 1 punkts	
	Atrisina vienu vienādojumu – 1 punkts	
	Atrisina otru vienādojumu – 1 punkts	
	Aprēķina otras figūras malas garumu – 1 punkts	

6.	Uzraksta vienādojuma saknes – 1 punkts	4
	Pārbauda saknes – 1 punkts	
	Uzraksta a vērtību, ar kuru vienādojumam nav sakne – 1 punkts	
	Pamato atbildi par a izvēli – 1 punkts	
7.	Saskata, ka vienādojumi nav ekvivalenti, ja $a = 4$ ($a = 16$) – 1 punkts	3
	Saskata, ka vienādojumi nav ekvivalenti, ja $a = 9$ ($a = 1$) – 1 punkts	
	Pamato apgalvojumu par a vērtībām, ar kurām vienādojumi ir ekvivalenti – 1 punkts	
Kopā		30