

7.TEMATS Trigonometriskie vienādojumi un nevienādības

[Temata apraksts](#)

[Skolēnam sasniedzamo rezultātu ceļvedis](#)

[Uzdevumu piemēri](#)

[Stundas piemērs](#)

[M_11_SP_07_01_P1](#)

[Trigonometrisko izteiksmju pārveidojumi](#)

[Skolēna darba lapa](#)

[M_11_SP_07_02_P1](#)

[Trigonometriskie vienādojumi un nevienādības](#)

[Skolēna darba lapa](#)

[M_11_SP_07_02_P2](#)

[Trigonometriskie vienādojumi un nevienādības](#)

[Skolēna darba lapa](#)

[M_11_UP_07_P1](#)

[Trigonometriskas identitātes](#)

[Skolēna darba lapa](#)

[M_11_LD_07_P](#)

[Redukcijas formulas](#)

[Skolēna darba lapa](#)

[1.variants](#)

[2.variants](#)

[Vērtēšanas kritēriji](#)

TRIGONOMETRISKIE VIENĀDOJUMI UN NEVIENĀDĪBAS

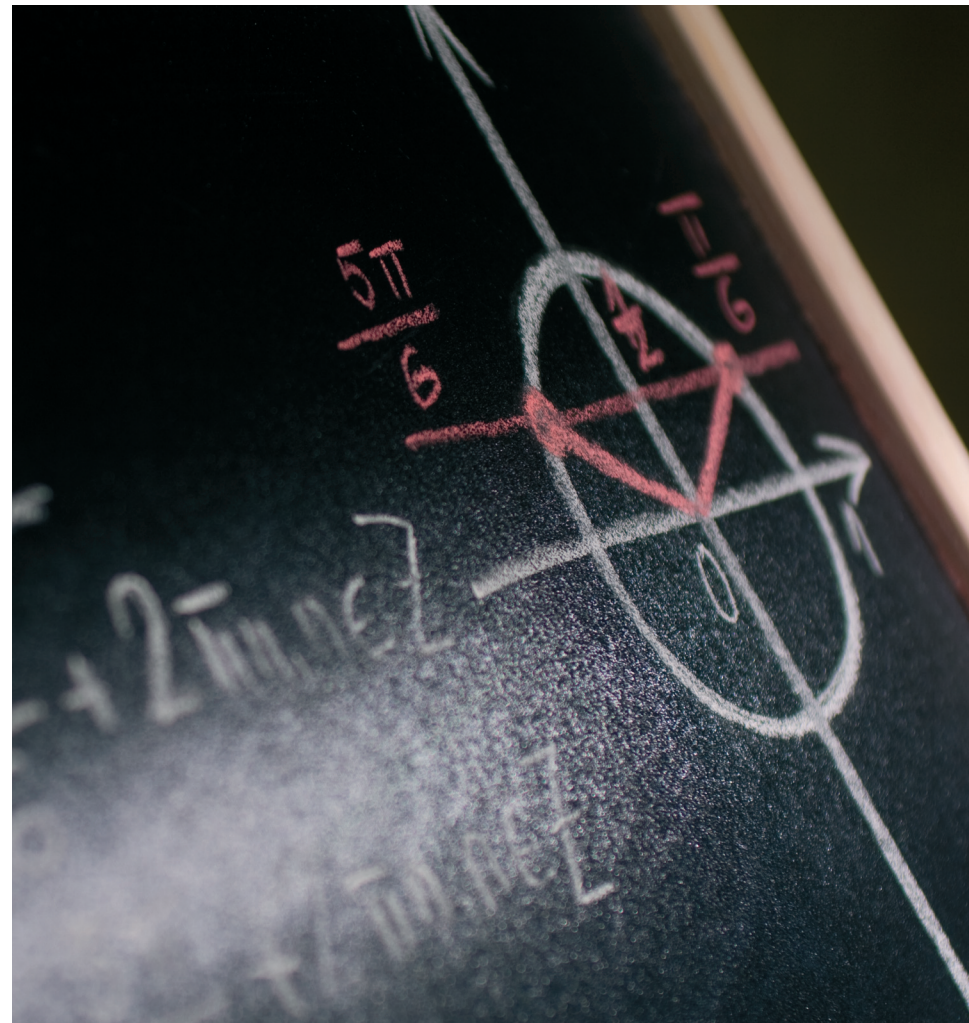
TEMATA APRAKSTS

Temata apguve paplašina priekšstatu par funkciju lietojumu, pilnveido vienādojumu un nevienādību atrisināšanas prasmes, attīsta algoritmisko domāšanu, dod pieredzi vizuālu modeļu (trigonometriskais vienības riņķis) daudzpusīgai izmantošanai. Trigonometrijas pamatjēdzieni ir neatņemama matemātiskās kultūras sastāvdaļa, jo tos lieto citu tematu apgūvē. Trigonometrisko funkciju, sakarību izpratne sekmē atsevišķu fizikas tematu apguvi. Vienādojumu atrisināšanas metožu saskatīšana un lietošana būs noderīga arī turpmākajos algebras tematos.

Pamatskolā ir apgūtas trigonometriskās sakarības taisnleņķa trijstūrī, 10. klasē paplašinot leņķa jēdzienu, ieviests trigonometrisko funkciju jēdziens. Skolēni prot izpildīt algebriskus pārveidojumus, viņiem ir pieredze lietot dažādas vienādojumu atrisināšanas metodes, risinot algebriskus vienādojumus.

Skolēniem jauni ir jēdzieni: $\arcsina$, $\arccosa$, $arctga$, $arcctga$, kuri ieviešami, kā leņķa apzīmējums, ja to nav iespējams precīzi izteikt; nav paredzēts izvērst ciklotrisko funkciju jēdzienu.

Salīdzinājumā ar līdzšinējo pieeju, šī temata satura apjoms ir samazināts, saturā atstāts būtiskākais un mainīti daži akcenti. Skolotāja galvenais uzdevums – parādīt tieši risināšanas metožu zināmu universālumu un funkcionālo sakarību daudzveidību, pilnveidot izpratni par definīcijas apgabala nozīmi un vienādojuma atrisināšanu. Tematā turpinās pamatošanas prasmju pilnveide, pierādot dažādas trigonometriskās sakarības. Jāpievērš uzmanība darbam ar informāciju, tās atlasī, piemēram, izvēloties nepieciešamo formulu. Svarīgi, ka nevis sarežģītu un samākslotu vienādojumu risināšana, bet gan nelielu, tomēr pilnīgi izprastu uzdevumu atrisināšana liecina gan par temata apguvi, gan arī par to, ka skolēnos veidojas zināmas kompetences šajā jomā.



CEĻVEDIS

Galvenie skolēnam sasniedzamie rezultāti

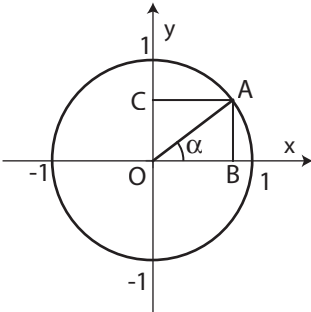
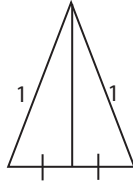
STANDARTĀ	Izprot izteiksmju definīcijas apgabala nozīmi, izpilda matemātisku izteiksmju (algebrisku, eksponenciālu, logaritmisku, trigonometrisku) identiskos pārveidojumus.	Izprot, ko nozīmē atrisināt vienādojumu, vienādojumu sistēmu; lieto vienādojumam, vienādojumu sistēmai piemērotus atrisināšanas algoritmus vai vispārīgās metodes. Izprot, ko nozīmē atrisināt nevienādību, nevienādību sistēmu, lieto nevienādībai, nevienādību sistēmai piemērotus atrisināšanas algoritmus vai vispārīgās metodes.	Atrod nepieciešamo informāciju dažādos informācijas avotos, novērtē tās pietiekamību, derīgumu.	Izprot pierādījuma nepieciešamību, būtību un struktūru, lieto dažādus pierādījumu veidus.	Plāno risinājumu; izvēlas vai izveido problēmai atbilstošu matemātisko modeli.
PROGRAMMĀ	Reducē, lieto sakarības starp viena argumenta trigonometriskām funkcijām, divkārsa argumenta formulas un argumentu saskaitīšanas formulas izteiksmju pārveidojumus, identitāšu pierādījumus un izteiksmju skaitlisko vērtību aprēķināšanā, pārveidojot trigonometriskos vienādojumus par pamatvienādojumiem.	- Atrisina trigonometriskos pamatvienādojumus: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\tan x = a$, $\cot x = a$, izmantojot atrisināšanas formulas vai nolasot atrisinājumu vienības riņķī, izprot to, ka trigonometriskajiem vienādojumiem var būt bezgalīgi daudz atrisinājumu. - Atrisina trigonometriskās pamatnevienādības: $\sin x < a$, $\cos x < a$, $\tan x < a$, $\cot x < a$, $(>, \leq, \geq)$, izmantojot vienības riņķi. - Saskata vispārīgo vienādojumu risināšanas metožu (sadališana reizinātājos, substitūcijas metode) pielietošanas iespējas trigonometrisko vienādojumu risināšanā; izprot definīcijas apgabala nozīmi.	Atrod atbilstošo formulu uzzīņas literatūrā un prot to pielietot, veicot trigonometriskos pārveidojumus.	Pamato trigonometriskās sakarības, izmantojot vienības riņķi, citas sakarības vai ģeometrisko figūru īpašības.	Izmanto vienības riņķi trigonometrisku funkciju vērtību, zīmju, vienādojumu un nevienādību atrisinājumu noteikšanai un/vai attēlošanai.
STUNDĀ	Vizualizēšana. Uzdevumu risināšana. <i>SP. Trigonometrisko izteiksmju pārveidojumi.</i> <i>VM. Trigonometrisko izteiksmju pārveidojumi.</i>	Uzdevumu risināšana. Situācijas analīze. <i>SP. Trigonometrisko vienādojumu un nevienādību risināšanas prasmi novērtēšana.</i> <i>KD. Trigonometriskās nevienādības.</i>		Izpēte. <i>LD. Redukcijas formulas.</i> <i>KD. Trigonometrisku formulu pierādīšana.</i>	Demonstrējums. <i>VM. Vienības riņķis.</i> <i>VM. Vienādojuma un nevienādības atrisinājums vienības riņķī.</i>

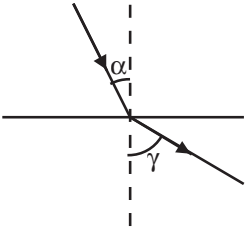
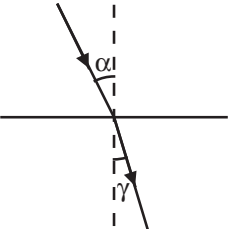
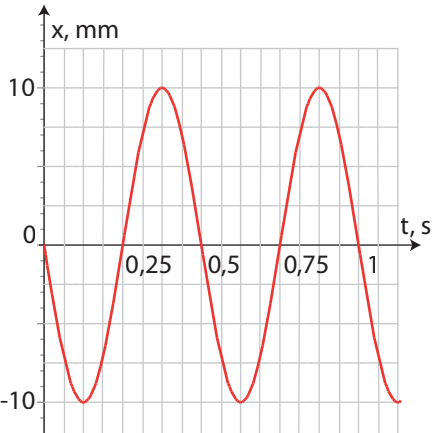
UZDEVUMU PIEMĒRI

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Izpilda algebriskus pārveidojumus ar trigonometriskām izteiksmēm.	Izpildi darbības! a) $\sin x + \sin x - \sin 2x$ b) $\frac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x}$	1. Izpildi darbības! $(\cos x - 3)^2 - \cos x \cdot \cos x + 6 \cos x$ 2. Sadali reizinātājos! $5 - 15 \cos x + 15 \cos^3 x - 5 \cos^2 x$	Vai doto izteiksmju vērtības ir vienādas visām pieļaujamām x vērtībām! Atbilde pamato! a) $\sin^2 x, \sin x^2, (\sin x)^2$ b) $\cos 3x, 3 \cos x$
Reducē, lieto sakarības starp viena argumenta trigonometriskām funkcijām, divkārsa argumenta formulas un argumentu saskaitīšanas formulas izteiksmju pārveidojumus, identitāšu pierādījumos un izteiksmju skaitlisko vērtību aprēķināšanā, pārveidojot trigonometriskos vienādojumus par pamatvienādojumiem.	1. Vienkāršo! a) $\sin^2 2t + \cos^2 2t$ b) $\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{ctg} 3x$ c) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ 2. Pārveido doto trigonometrisko vienādojumu par pamatvienādojumu! $\sin x \cos 2x - \sin 2x \cos x = -1$	1. Aprēķini 75° un $\cos 75^\circ$, ņemot vērā, ka $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$! 2. Pierādi identitāti! $\cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = \cos 2\alpha$ 3. Dots, ka $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ un $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Aprēķini izteiksmes $\sin \alpha$ skaitlisko vērtību!	1. Vienkāršo! $\frac{\cos 36^\circ}{\sin 54^\circ}$ 2. Pierādi, ka izteiksmes vērtība nav atkarīga no α vērtības! $\cos^2 \alpha + \cos^2 (120^\circ + \alpha) + \cos^2 (120^\circ - \alpha)$ 3. Sastādi dotā vienādojuma risināšanas plānu! $\sin 3x = \cos x$

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Atrisini trigonometriskos pamatvienādojumus: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, izmantojot atrisināšanas formulas vai nolasot atrisinājumu vienības riņķi, izprot to, ka trigonometriskajiem vienādojumiem var būt bezgalīgi daudz atrisinājumu.	1. Atrisini vienādojumu! $\cos y = 0,5$ $\sin x = 0$ $\sin x = -2$ 2. Kuras no dotajām vērtībām ietilpst vienādojuma $\cos x = 0$ atrisinājumu kopā? a) $\frac{\pi}{2}$, b) $\frac{5\pi}{2}$, c) $\frac{9\pi}{2}$, d) $\frac{-3\pi}{2}$. Uzraksti vēl trīs leņķa x vērtības, kas ietilpst vienādojuma $\cos x = 0$ atrisinājumu kopā?	Atrisini vienādojumu! $\sin 0,5y = -0,5$ $\operatorname{tg}(a - 30^\circ) = \sqrt{3}$ $\cos(2x + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1. Kādām parametra a vērtībām vienādojumam $2\cos x = a$ ir atrisinājums? 2. Atrisini abus vienādojumus un nosaki to kopīgos atrisinājumus! $\cos x = 0$ un $\cos 2x = 0$
Izprot jēdzienus – arcsina, arccosa, arctga, arcctga –, lieto tos vienādojumu un nevienādību risināšanā.	Kura no vienādībām ir patiesa? a) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$ b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$ c) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -60^\circ$	1. Vienības riņķī attēlo leņķus $\arcsin \frac{2}{3}$, $-\arcsin \frac{2}{3}$, $\pi + \arcsin \frac{2}{3}$, $\pi - \arcsin \frac{2}{3}$! 2. Atrisini vienādojumu! $\cos x = \frac{1}{5}$	1. Atrodi vienu x vērtību, ar kuru dotā vienādība ir patiesa, un vienu x vērtību, ar kuru dotā vienādība nav patiesa! $\arcsin(\sin x) = x$ 2. Pamato identitātes, izmantojot dotos zīmējumus (M_11_UP_07_P1)!
Atrisini trigonometriskās pamatnevienādības: $\sin x < a$, $\cos x < a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{ctg} x < a$, ($>$, $\leq$, $\geq$), izmantojot vienības riņķi.	Attēlo vienības riņķī dotās nevienādības atrisinājumu! a) $\sin t \geq 0,5$ b) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\operatorname{tg} x \leq 1$	1. Atrisini nevienādību $\cos x < -0,5$, ja $x \in [0; 2\pi]$! 2. Attēlo vienības riņķī un uzraksti nevienādības atrisinājumu! $\sin t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$	1. Attēlo vienības riņķī un uzraksti atrisinājumu trigonometriskajai pamatnevienādībai! $\cos x \geq \frac{1}{4}$ 2. Kādām parametra a vērtībām nevienādībai $\cos 3x \geq a$ nav atrisinājuma?

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III						
Saskata vispārīgo vienādojumu risināšanas metožu (sadališana reizinātājos, substitūcijas metode) pielietojšanas iespējas trigonometrisko vienādojumu risināšanā; izprot definīcijas apgabala nozīmi.	1. Atrodi pirmās kolonnas vienādojumam atbilstošu otrās kolonnas vienādojumu, ja ir izmantota substitūcija! <table><tr><td>$\sin^2x+2\sin x-15=0$</td><td>$-a^2+a=0$</td></tr><tr><td>$-\cos^2x+\cos x=0$</td><td>$t^2-4=0$</td></tr><tr><td>$\operatorname{tg}^2x-4=0$</td><td>$b^2+2b-15=0$</td></tr></table> 2. Sadali reizinātājos! $\operatorname{tg}^2x-2\operatorname{tg}x$	$\sin^2x+2\sin x-15=0$	$-a^2+a=0$	$-\cos^2x+\cos x=0$	$t^2-4=0$	$\operatorname{tg}^2x-4=0$	$b^2+2b-15=0$	1. Atrisini vienādojumu! $\sin 2x-\cos x=0$ 2. Atrisini vienādojumu $(\cos x+1)^2+\cos x-1=5$	1. Atrisini vienādojumu! $\sin 2x+\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x=0$ 2. Izlasi tekstu un izmanto iegūto informāciju, lai atrisinātu vienādojumu $\cos x-\sqrt{3} \sin x=0$! Ja vienādojuma $A=B$ abas puses izdala ar izteiksmi $C(C \neq 0)$, tad iegūst dotajam vienādojumam ekvivalentu vienādojumu $\frac{A}{C}=\frac{B}{C}$.
$\sin^2x+2\sin x-15=0$	$-a^2+a=0$								
$-\cos^2x+\cos x=0$	$t^2-4=0$								
$\operatorname{tg}^2x-4=0$	$b^2+2b-15=0$								
Lieto jēdzienus – trigonometriskā funkcija, vērtību apgabals, pāra funkcija, nepāra funkcija, periodiska funkcija, periods –, pārveidojot trigonometriskās izteiksmes un aprēķinot to vērtības, atrisinot vienādojumus un nevienādības.	Uzraksti pamatojumu! a) $\cos (-60^{\circ})=\cos \left(60^{\circ}\right)$, jo b) $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$, jo c) $\sin 750^{\circ}=\sin \left(2 \cdot 360^{\circ}+30^{\circ}\right)=\sin 30^{\circ}$, jo	1.Vienkāršo izteiksmi, pamatojot pārveidojumus! a) $\cos \left(-60^{\circ}\right)+\sin \left(-30^{\circ}\right)-\sin \left(390^{\circ}\right)$ b) $1-\operatorname{tg}(-x) \cdot \operatorname{ctg}(-x)$ 2. Pamato, ka vienādojumam $2 \sin x+3=7$ nav sakņu!	1. Izmantojot vienības riņķi, izsaki dotās izteiksmes ar šaurā leņķa x trigonometrisko funkciju palīdzību! Saskati kopīgo iegūtajās sakarībās un formulē to! $\sin \left(\frac{\pi}{2}+x\right), \cos \left(\frac{\pi}{2}+x\right), \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right), \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ 2. Pamato, ka vienādojumam nav sakņu! $2 \sin x-3 \cos x=5$						
Izmanto vienības riņķi trigonometrisko funkciju vērtību, zīmju, vienādojumu un nevienādību atrisinājumu noteikšanai un/vai attēlošanai.	1. Nosaki, vai izteiksmju $\sin 2 \alpha ; \cos (\alpha +\beta) ; \operatorname{tg} 3 \beta$ vērtības ir pozitīvi vai negatīvi skaitļi, ja $\alpha =63^{\circ}$ un $\beta =78^{\circ}$! 2. Leņķis x ir šaurs leņķis. Kurā kvadrantā atrodas leņķis $60^{\circ}+x ; 90^{\circ}+x ; 180^{\circ}+x ; 360^{\circ}-x$? 3. Izmantojot vienības riņķi, atrodi divus pirmā kvadranta leņķus, kuriem sinuss ir vienāds ar $\frac{1}{2}$, un divus otrā kvadranta leņķus, kuriem sinuss ir vienāds ar $\frac{1}{2}$! Pieraksti iegūtos rezultātus kā vienādības formā $\sin \alpha =\sin \beta$!	1. Atrodi negatīvu otrā kvadranta leņķi x, par kuru zināms, ka $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$! 2. Par leņķiem α un β zināms, ka $\cos \alpha =\cos \beta$. Attēlo vienības riņķī leņķus α un β! 2. Atrisini vienādojumu! a) $\cos 3 x=\cos 6 x$ b) $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} 4 x$ c) $\sin x=\sin (-x)$	1. Dots, ka $\alpha \in\left[100^{\circ} ; 200^{\circ}\right]$ un $\beta \in\left[200^{\circ} ; 250^{\circ}\right]$. Nosaki, kādās robežās atrodas izteiksmes $\sin (\alpha +\beta)$ vērtības! 2. Atrisini vienādojumu! $\frac{\cos 3 x}{\cos x}=0$						

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Pamato trigonometriskās sakarības, izmantojot vienības riņķi, citas sakarības vai ģeometrisko figūru īpašības.	Zīmējumā dots vienības riņķis. Daudzpunktes vietā ieraksti atbilstošo leņķa funkciju!  $AB=...$ $OB=...$ $OB^2+AB^2=...+...=1$	1. Trijstūrī ABC novilkta mediāna CK. Pierādi, ka $\sin(\angle AKC)=\sin(\angle CKB)$, izmantojot trijstūru AKC un CKB laukumus! 2. Pierādi, ka $\cos(\pi-x)=-\cos x$, izmantojot vienības riņķi! 3. Izmantojot trigonometrisku funkciju īpašības, redukcijas formulas un formulu $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$ izsaki dotās izteiksmes ar leņķu α un β trigonometriskajām izteiksmēm! a) $\sin(\alpha-\beta)$ b) $\cos(\alpha+\beta)$	1. Zināms, ka šauriem leņķiem α ir spēkā sakarība $\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$. Pierādi, ka šī sakarība ir spēkā jebkuram pagriezienu leņķim α? 2. Izmantojot doto zīmējumu un zināšanas par trijstūra laukumu, pierādi formulu $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$! Kādiem leņķiem α ir pierādīta formula? 
Atrod atbilstošo formulu uzziņas literatūrā un prot to pielietot, veicot pārveidojumus.	Sameklē atbilstošu formulu un pārveido summu $\cos 3x+\cos 5x$ reizinājumā!	Aprēķini izteiksmes $\sin \frac{\alpha}{2}$ vērtību, ja $\cos \alpha=0,28$ un $\alpha \in (270^\circ; 360^\circ)$!	Atrisini vienādojumu! $2\sin x-3\cos x=1$
Izmanto pretpiemēru, novērtējot vienādības patiesumu.	Izmantojot konkrētu leņķa x vērtību, pamato, ka vienādība $\sin 2x=2\sin x$ nav patiesa!	Pamato, ka sakarība $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ nav patiesa!	Vai sakarība $\operatorname{tg} x \cdot \cos x=\sin x$ ir patiesa visām x vērtībām?

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Saskata trigonometrisko izteiksmju pārveidojumu un vienādojumu lietojumu fizikā (svārstības, viļņi), mūzikas teorijā u.c.	Skolas fizikas kursā brīvās krišanas paātrinājums g tiek uzskatīts par konstantu lielumu, lai gan g mainās atkarībā no ģeogrāfiskā platuma θ (grādos). Šo atkarību tuvināti apraksta formula $g \approx 9,78049(1 + 0,005288 \sin^2 \theta - 0,000006 \sin^2 2\theta)$. Aprēķini brīvās krišanas paātrinājumu Rīgā ($\theta = 57^\circ$) un Dakārā ($\theta = 15^\circ$), lietojot kalkulatoru!	1. Dota izteiksme, kas raksturo strāvas stipruma I (ampēros) svārstības maiņstrāvas ķēdē $I = 30 \sin(120\pi \cdot t)$, kur t – laiks sekundēs. a) Nosaki strāvas maksimālo stiprumu! b) Sastādi vienādojumu, kura atrisināšana ļautu noteikt laika momentus, kuros strāvas stiprums vienāds ar 0! c) Sastādi vienādojumu, kura atrisināšana ļautu noteikt laika momentus, kuros strāvas stiprums ir maksimāli iespējamais! 2. No fizikas kursa zināms, ka, gaismas staram pārejot no vienas vides otrā, krišanas leņķa α sinusa attiecība pret laušanas leņķa γ sinusu ir vienāda ar gaismas stara ātruma otrajā vidē attiecību pret gaismas stara ātrumu pirmajā vidē. Atkarībā no ātrumu skaitliskajām vērtībām laušanas leņķis ir vai nu lielāks vai mazāks, salīdzinot ar krišanas leņķi (skat. zīm.).   Dots, ka gaismas stars pāriet no gaisa ūdenī. Gaismas stara ātrums gaisā ir $3 \cdot 10^8$ km/s, bet gaismas stara ātrums ūdenī ir $2,25 \cdot 10^8$ km/s. Kurš no leņķiem šajā gadījumā ir lielāks – krišanas vai laušanas leņķis? Atbildi pamato!	Grafikā attēlota svārstību kustībā esoša ķermeņa novirze no līdzsvara stāvokļa atkarībā no laika (1 sekunde atbilst 16 rūtiņām).  Svārstības raksturo formula $x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ kur x – svārsta novirze no līdzsvara, A – amplitūda (novirzes maksimālā vērtība), T – periods (laiks, kurā notiek pilns kustības cikls), t – laiks. Izmantojot doto informāciju, aprēķini pirmos trīs laika momentus, kuros ķermenis būs novirzījies 5 mm no līdzsvara stāvokļa!

STUNDAS PIEMĒRS

TRIGONOMETRISKO IZTEIKSMJU PĀRVEIDOJUMI

Mērķis

Nostiprināt prasmes pārveidot trigonometriskās izteiksmes, pamatot savas domas un uzklaut citu viedokli, veicinot skolēnu sadarbību.

Skolēnam sasniedzamais rezultāts

- Izpilda trigonometrisko izteiksmju pārveidojumus.
- Pamato pārveidojumu gaitu.
- Sadarbojas, strādājot grupā.

Nepieciešamie resursi

- Izdales materiāli grupai (M_11_SP_07_01_P1).
- Vizuālais materiāls (M_11_SP_07_01_VM1).

Mācību metodes

Vizualizēšana, uzdevumu risināšana.

Stundas gaita

Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Vizualizēšana (10 minūtes)	
Izdala grupām 1. veida kartītes (M_11_SP_07_01_P1). Iepazīstina ar uzdevumu: atrast kartīšu pārus, kuri kopā veido kādu no trigonometriskām formulām, neizmantojot pierakstus, grāmatas un formulu lapas.	Saņem kartītes, noklausās uzdevumu. Atrod kartīšu pārus. Atceras/atpazīst formulas, pārdomā pazīmes, pēc kā var atpazīt formulas arī tad, ja precīzi neatceras.
Lūdz skolēniem atbildēt uz jautājumiem: 1) Kādas trigonometrisko formulu nosaukumus skolēni atceras? Uzraksta formulu nosaukumus uz tāfeles. <i>Tāfele ir sadalīta 4 kolonnās, kuru nosaukumus ieraksta skolotājs, rakstot skolēnu nosauktos formulu nosaukumus.</i> Aicina skolēnus pie tāfeles atbilstošajā kolonnā ierakstīt formulas, kuras saliktas, izmantojot kartītes. Sarakstu uz tāfeles papildina ar citām zināmām formulām, tādējādi atkārtot visas apgūtās trigonometriskās identitātes. 2) Kāpēc būtu jāzina, jāiegaumē trigonometriskās formulas? Kuras no formulām nav nepieciešamas iemācīties?	Atceras iepriekšējās stundās dzirdētos formulu nosaukumus, nosauc tos. <i>Piemēram, viena argumenta formulas, divkāršā argumenta formulas, argumentu saskaitīšanas formulas, redukcijas formulas.</i> Klasificē ar kartītēm saliktās formulas, salīdzina viedokļus. Raksta formulas uz tāfeles. Papildina formulu sarakstu. Iespējamās skolēnu atbildes: <i>Lai vienkāršotu kādu izteiksmi, tajā vispirms jāatpazīst kāds „fragments” no trigonometriskās identitātes, kuru varētu izmantot. Formulu var precizēt, atrodot to literatūrā, bet jāzina, jābūt priekšstatam par identitātes „formu, izskatu”. Nav nepieciešams iegaumēt redukcijas formulas, tās var „izdomāt”, jāzina princips, ka var reducēt, kā tas notiek.</i>

Mācību organizācijas formas

Grupu vai pāru darbs. *Sadalīties grupās vēlams jau stundas sākumā.*

Vērtēšana

Skolēni vērtē savu prasmi veikt pārveidojumus, salīdzinot savus rezultātus ar atbildēm un risinājumu paraugiem, un viens otra ieguldījumu darba veikšanā. Skolotājs vērtē skolēnu prasmi pārveidot trigonometriskās izteiksmes un pamatot risinājumus, klausoties skolēnu komentārus, skaidrojumus; sadarbības prasmes, vērojot grupu darbu.

Skolotāja pašnovērtējums

Secina par stundas mērķa sasniegšanu, izmantotās metodes lietderību un efektivitāti, par to, kas izdevās un kādiem jautājumiem būtu jāpievērš lielāka uzmanība.

Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Uzdevumu risināšana (35 minūtes)	
Izdala grupām 2. veida kartītes ar uzdevumiem. Dod grupām uzdevumu: vienkāršot izteiksmes, kas uzrakstītas uz zaļajām kartītēm, atrast rezultātam atbilstošo sarkano kartīti. Aicina strādāt tā, lai visi skolēni varētu paskaidrot risinājumu. Nosaka darba izpildes laiku 15 minūtes. <i>Atbilžu kartīšu skaits varētu būt lielāks. Visām grupām vienādi uzdevumi, lai pēc tam varētu pārrunāt risinājuma gaitu.</i> Aicina skolēnus izmantot formulas, kuras uzrakstītas uz tāfeles vai formulu lapas.	Saņem kartītes un klausās uzdevumu.
Vēro skolēnu darbu. <i>Ja kāda grupa pabeigusi darbu ātrāk, var dot papildu uzdevumu.</i>	Plāno darbu: var sadalīt risināmos uzdevumus starp grupas dalībniekiem vai risināt visi visus uzdevumus. Risina uzdevumus, sadarbojas grupā, salīdzina un pārrunā uzdevumu risinājumus, formulu lietojumu.
Demonstrē uzdevumu atbildes (M_11_SP_07_01_VM1). Dod laiku izvērtēt risinājumus grupas ietvaros, ja nepieciešams, veikt labojumus, sagatavot jautājumus. Aicina skolēnus uzdot jautājumus, noteikt, kurus uzdevumus un to risinājumus nepieciešams apspriest, pārrunāt, dot pilnu risinājumu. Aicina skolēnus, kuri konkrēto uzdevumu atrisinājuši, to demonstrēt, komentēt, kādas formulas izmantotas. Ar skolēniem pārrunā, kuras no formulām pārveidojumos tika izmantotas visbiežāk, kā veiksmīga formulu izvēle atvieglo uzdevumu risināšanu, kādas bija grūtības, neveiksmju iemesli.	Salīdzina rezultātus. Pārbauda kļūdainos risinājumus, ja tādi ir, labo. Pedalās turpmākās darbības plānošanā, ierosina, jautā. Demonstrē un komentē risinājumu. Klausās citos skolēnos un izvērtē savus risinājumus, atrod kļūdu cēloņus. Pārskatot risinājumu, konstatē „populārākās” formulas. Izvērtē uzdevumu risināšanas procesu.
Lūdz skolēnus pārdomāt sadarbību grupā, pateikt grupas ietvaros katra stipro pusi.	Individuāli pārdomā. Formulē un pasaka katram grupas dalībniekam vienu pozitīvu faktu par viņa ieguldījumu grupas darbā.

STUNDAS PIEMĒRS

TRIGONOMETRISKO VIENĀDOJUMU UN NEVIENĀDĪBU RISINĀŠANAS PRASMJU NOVĒRTĒŠANA

Mērķis

Pilnveidot skolēnu pašnovērtēšanas prasmes, uzdevumu risinājumu izvērtēšanas rezultātā, formulējot savas trigonometrisko vienādojumu un nevienādību risināšanas prasmes.

Skolēnam sasniedzamais rezultāts

- Atrīsina trigonometriskos vienādojumus un nevienādības.
- Novērtē temata apguves laikā iegūto zināšanu un prasmju līmeni.
- Noskaidro jautājumus, kuri vēl jāatkārto un kuri jāapgūst papildus.

Nepieciešamie resursi

- Izdales materiāli katram skolēnam (M_11_SP_07_02_P1), atbilžu lapa pārim (M_11_SP_07_02_P2).
- Formulu lapa.

Mācību metodes

Uzdevumu risināšana, situācijas analīze.

Mācību organizācijas formas

Pāru darbs, individuāls darbs.

Vērtēšana

Skolotājs vērtē visas klases prasmes kopumā, uzklusot skolēnu formulētos jautājumus, secina par skolēnu prasmi formulēt problēmas. Skolēni veic savu prasmju pašnovērtējumu.

Skolotāja pašnovērtējums

Secina par stundas mērķa sasniegšanu, izmantoto metožu lietderību un efektivitāti, par to, kas izdevās un kādiem jautājumiem būtu jāpievērš lielāka uzmanība.

Stundas gaita

Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Uzdevumu risināšana (25 minūtes)	
Jautā, vai skolēni zina teiku par balodi, kurš mācījās vīt ligzdu, ja nezina, īsi izstāsta. Lūdz katram skolēnam individuāli pārdomāt, kā vērtēt savas šī brīža prasmes atrisināt trigonometriskos vienādojumus un nevienādības. Akcentē, ka gadījumā, ja kaut ko neprot, ir svarīgi saprast, kāds tam iemesls – precīzi formulēt problēmas. Lūdz skolēnus īsi uzrakstīt, ko vēl labi neprot, kas sagādā grūtības, jautājumus, kas jānoskaidro, jāprecizē. <i>Var aicināt dažus skolēnus, kuri vēlas, raksturot savas prasmes, pateikt problēmas.</i> Izstāsta par stundas mērķi, galvenajiem rezultātiem un stundas gaitu. Uzsver, ka stundas laikā skolēniem būs iespēja novērtēt savas zināšanas trigonometrisko vienādojumu un nevienādību atrisināšanā, noskaidrot, kas vēl jāapgūst.	Atceras teiku par „Protu, protu!” Pārdomā savas trigonometrisko vienādojumu un nevienādību risināšanas prasmes. Formulē secinājumus par savām prasmēm, īsi pieraksta. Gūst informāciju par stundas gaitu un uzdevumiem, ja nepieciešams, uzdod jautājumus.
Izdala darba lapu ar uzdevumiem (M_11_SP_07_02_P1). Aicina strādāt patstāvīgi, izmantojot tikai formulu lapu, jo šajā brīdī ir svarīgi novērtēt katram savas zināšanas un prasmes.	Saņem darba lapu. Atrīsina piedāvātos trigonometriskos vienādojumus un nevienādības.
Aicina skolēnus sadalīties pa pāriem, salīdzināt un apspriest risinājumus un atbildes, un vienoties par pareizo atrisinājumu. Izdala katram pārim atbilžu lapu un lūdz novērtēt savu risinājumu.	Sadalās pāros. Apspriež atbildes, vienojas pāri par pareizajiem atrisinājumiem. <i>Ja nepieciešams, izmanto grāmatas, pierakstu klades, uzdod jautājumus skolotājam.</i> Salīdzina atbildes, novērtē tās, liekot punktus, saskaita visus iegūtos punktus.

Skolotāja darbība	Skolēnu darbība								
Situācijas analīze (15 minūtes)									
Aicina skolēnus individuāli izveidot un aizpildīt tabulu, izvērtējot savas zināšanas un prasmes. Jāvērš uzmanība uz to, lai skolēni precīzi formulētu problēmas – ko tieši nezina, neprot, kur, kāpēc kļūdās (neder – nemāku atrisināt 4. uzd.). Aicina skolēnus nosaukt jautājumus, kuri ierakstīti kolonnā „Es nezinu, neprotu” un kuru apguvei vēl nepieciešama palīdzība. Palīdz precizēt formulējumus. Veic piezīmes, fiksējot problēmas, lai varētu precīzi novērtēt situāciju klasē kopumā, sniegtu ieteikumus konkrētiem skolēniem, plānotu nākamo stundu. Secina, kopā ar skolēniem plāno turpmāko darbu.	Pārdomā savas zināšanas un prasmes, uzdevumu risināšanā konstatēto, iespējami precīzi formulē prasmes un „neprasmi” cēloņus. Izveido un aizpilda tabulu: <table border="1"> <tr> <td>Es jau zinu, protu</td><td>Es nezinu, neprotu</td></tr> <tr> <td>1)</td><td>1)</td></tr> <tr> <td>2)</td><td>2)</td></tr> <tr> <td>...</td><td>...</td></tr> </table> Skolēni nosauc jautājumus, kuri ierakstīti kolonnā „Es nezinu, neprotu”. Precizē formulējumus, papildina. Secina par savu un klases kopējo situāciju. Komentē, iesaka turpmāko rīcības plānu, kas ļautu novērst trūkumus – ko spēs paši, ko noskaidros patstāvīgi, kur vēl nepieciešama skolotāja palīdzība.	Es jau zinu, protu	Es nezinu, neprotu	1)	1)	2)	2)	...	...
Es jau zinu, protu	Es nezinu, neprotu								
1)	1)								
2)	2)								
...	...								
Aicina salīdzināt stundas sākumā fiksēto par savām prasmēm ar stundas gaitā konstatēto. Uzdod mājas darbu – pārskatīt visus tabulā ierakstītos jautājumus, pievēršot lielāku uzmanību labās puses ailītei. Izdala darba lapu, kura ir līdzīga stundā izmantotajām. <i>Katrs skolēns risina tikai tos uzdevumus, kuru risināšanai prasmes ir nepietiekamas. Ja skolēnam otrā tabulas ailīte ir tukša, viņš risina paaugstinātas grūtības pakāpes uzdevumus.</i>	Salīdzina stundas sākumā un stundas gaitā secināto par savām prasmēm. Pārdomā mājās veicamo. Saņem darba lapu.								

REDUKCIJAS FORMULAS

Darba izpildes laiks 40 minūtes

M_11_LD_07

Mērķis

Veidot izpratni par pagrieziena leņķa trigonometrisko funkciju vērtību reducēšanu uz šaura leņķa trigonometrisko funkciju vērtībām, saskatot likumsakarības.

Sasniedzamais rezultāts

- Izmantojot vienības riņķi, saskata un pierāda redukcijas formulas.
- Vispārina iegūtos rezultātus, saskatot likumsakarības redukcijas formulās.

Saskata un klasificē lielumus, formulē pētāmo problēmu	Dots
Veido plānu	Dots
Iegūst un apstrādā informāciju	Patstāvīgi
Formulē pieņēmumu/ hipotēzi	–
Veic pierādījumu	Patstāvīgi
Analizē un izvērtē rezultātus, secina	Mācās
Prezentē darba rezultātus	Patstāvīgi
Sadarbojas, strādājot grupā (pārī)	Mācās

Darbu veic pāros vai grupās. Jāparedz laiks prezentācijai, kā arī materiāli prezentāciju noformēšanai un demonstrēšanai. Ja darbs tiek veikts grupās, skolotājs var ieteikt darba gaitas pirmajos divos soļos paredzēto darbu sadalīt starp grupas dalībniekiem.

Situācijas apraksts

Funkcijas $y=\sin x$ un $y=\cos x$ ir periodiskas ar periodu 360° . Šo īpašību raksturo formulas $\sin(360^\circ+\alpha)=\sin\alpha$ un $\cos(360^\circ+\alpha)=\cos\alpha$.

Mācoties par pagrieziena leņķi un tā atlikšanu vienības riņķī, tika iegūtas formulas $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ un $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$, kas ir spēkā jebkuram šauram leņķim α .

Izceltajās formulās šaurais leņķis α tiek atņemts/pieskaitīts no/pie leņķiem 180° un 360° , kuri ir vienības riņķa kvadrantu robežleņķi. Kā zināms, ir vēl divi kvadrantu robežleņķi, 90° un 270° .

Pētāmā problēma

Vai funkciju $y=\sin x$ un $y=\cos x$ vērtības leņķiem $90^\circ\pm\alpha$, $180^\circ\pm\alpha$, $270^\circ\pm\alpha$ un $360^\circ\pm\alpha$ vienmēr var izteikt kā šaura leņķa α trigonometrisko funkciju vērtības?

Ja skolotājs uzskata par nepieciešamu, uzreiz var apskatīt arī funkcijas $y=\operatorname{tg} x$ un $y=\operatorname{ctg} x$, bet tas var aizņemt pārāk daudz laika.

Darba gaita

- Izmantojot vienības riņķi, noskaidro, vai izteiksmju $\sin(360^\circ-\alpha)$, $\cos(360^\circ-\alpha)$, $\sin(180^\circ+\alpha)$ un $\cos(180^\circ+\alpha)$ vērtības var izteikt ar leņķa α sinusa vai kosinusa palīdzību.
- Izmantojot vienības riņķi, iegūst analogiskas formulas attiecībā pret leņķiem $90^\circ\pm\alpha$ un $270^\circ\pm\alpha$.
- Analizējot visas iegūtās formulas kopumā, saskata principu, kuru lietojot, varētu noteikt funkcijas veidu un zīmi formulu labajā pusē.

Datu apstrāde un iegūto formulu pierādīšana

Skolēnus nodrošina ar papildu darba lapām.

Skolēniem vajadzētu atgādināt, ka, veidojot zīmējumus vienības riņķī, uzskatāmības labad leņķis α jāizvēlas samērā šaurs.

Rezultātu izvērtēšana

Kādas iespējas vispārināt darbā iegūtos rezultātus tu saskati?

Ja skolēns ir ticis galā ar šo darbu, iezīmējas vismaz divi tālāku pētījumu virzieni:

- 1) vai iegūtie rezultāti ir attiecināmi arī uz funkcijām $y=\operatorname{tg} x$ un $y=\operatorname{ctg} x$;
- 2) vai iegūtie rezultāti ir spēkā arī gadījumos, ja α ir jebkurš leņķis.

TRIGONOMETRISKO IZTEIKSMJU PĀRVEIDOJUMI

1. VEIDA KARTĪTES

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$	1
$\sin 2\alpha$	$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
$\cos(\alpha - \beta)$	$\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$
$\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{tg} 2\alpha$	$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$
$\cos(180^\circ - \alpha)$	$-\cos\alpha$
$1 + \operatorname{tg}^2\alpha$	$\frac{1}{\cos^2\alpha}$

2. VEIDA KARTĪTES (ZAĻAS)

$$1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{2\sin x}$$

$$(\sin x + \cos x)^2$$

$$\cos 24^\circ \cos 31^\circ - \sin 24^\circ \sin 31^\circ - \cos 55^\circ$$

$$\frac{\sin 8x}{\sin 4x} - 2\cos^2 2x$$

$$8\sin 15^\circ \cos 15^\circ (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) (\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ)$$

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \operatorname{tg} x$$

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(-x)}{\operatorname{ctg}(\pi - x) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$$

2. VEIDA KARTĪTES (SARKANAS)

$1 + \sin 2x$	0
0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-2\sin^2 2x$	$\frac{1}{\cos x}$
$\sin x$	-1
$-\sin x$	

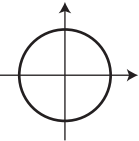
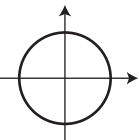
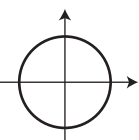
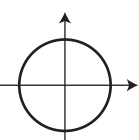
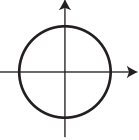
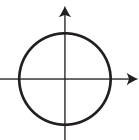
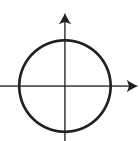
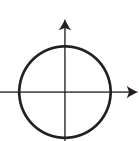
Vārds

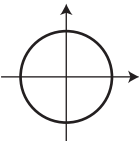
uzvārds

klase

datums

TRIGONOMETRISKIE VIENĀDOJUMI UN NEVIENĀDĪBAS

	Risinājums un atbildes	Punkti
1. uzdevums	Atrisini vienādojumu!	
$\sin x = -1$		1 punkts
$\cos x = 0,5$		1 punkts
$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$		1 punkts
$\operatorname{ctg}(x+1)=2$		2 punkti
2. uzdevums	Atrisini nevienādību!	
$\operatorname{ctg} x > -1$		1 punkts
$\cos x \leq -2$		1 punkts
$0 < \sin x < 1$		2 punkti
$\operatorname{tg} 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$		2 punkti

3. uzdevums	Pārveido vienādojumu par pamatvienādojumu! Vienādojums NAV jāatrisina.	
$\cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$		1 punkts
$\operatorname{tg}(90^\circ - x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$		1 punkts
$\sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x = 0$		1 punkts
$\sin x \cos x = 1$		1 punkts
4. uzdevums	Norādi metodi, kuru izmantosi vienādojuma atrisināšanai (substitūciju metode, sadalīšana reizinātājos)! Vienādojums NAV jāatrisina.	
$\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg}^2 x = 0$		1 punkts
$\cos^2 x - 3 \cos x - 4 = 0$		1 punkts
$\sin x - 1 + \sin^3 x - \sin^2 x = 0$		1 punkts
$\frac{1}{\operatorname{ctg} x + 1} + \operatorname{ctg} x + 1 = 0$		1 punkts
5. uzdevums	Atrisini vienādojumu!	
$\cos 4x = 2 \sin 2x - \frac{1}{2}$ vai $\operatorname{tg}(x+1) \operatorname{ctg}(2x+3) = 1$		7 punkti
Kopā punkti:		

TRIGONOMETRISKIE VIENĀDOJUMI UN NEVIENĀDĪBAS

Mājas darbs

1. uzdevums

Atrisini vienādojumu!

$$\sin x = -0,2$$

$$\cos x = 0,1$$

$$\operatorname{tg} x = -1$$

$$\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. uzdevums

Atrisini nevienādību!

$$\operatorname{tg} x < -1$$

$$\cos x > -2$$

$$\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{ctg} 2x \leq 5$$

3. uzdevums

Pārveido trigonometriskos vienādojumus par pamatvienādojumiem!

$$2\cos x \cdot \sin x = -\frac{2}{3}$$

$$\operatorname{ctg}(18\pi + x) = -2$$

$$(\sin 2x + \cos 2x)^2 = 2$$

$$\sin 4x \sin x - \cos 4x \cos x = 4$$

4. uzdevums

Pārveido par algebrisku vienādojumu, izmantojot atbilstošu substitūciju!

$$1 + 2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x = 0$$

$$\cos^2 x - 3\cos x - 4\sin^2 x = 0$$

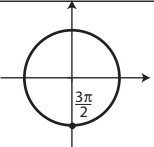
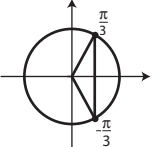
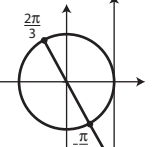
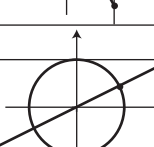
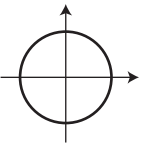
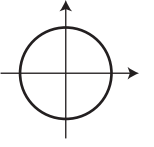
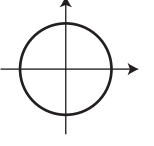
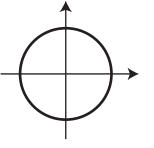
$$2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - 3 = 0$$

5. uzdevums*

Atrisini vienādojumu!

$$\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right| = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

TRIGONOMETRISKIE VIENĀDOJUMI UN NEVIENĀDĪBAS

Risinājums un atbildes	
1. uzdevums	
	$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
	$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
	$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
	$x + 1 = \arccotg 2 + \pi n$ $x = -1 + \arccotg 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
2. uzdevums	
	$x \in \left(\pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$
	$n \in \emptyset$
	$x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}$
	$2x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z}$ $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \right], n \in \mathbb{Z}$
3. uzdevums	
$\cos 2x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$	
$\ctg x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\sin(2x + 3x) = 0$	
$\sin 2x = 2$	

Risinājums un atbildes**4. uzdevums**

Sadalīšana reizinātājos (iznešana pirms iekavām).

Substitūciju metode ($\cos x = t$).

Sadalīšana reizinātājos (grupēšanas paņēmieni).

Substitūciju metode ($\operatorname{ctg} x + 1 = t$).

5. uzdevums

$$\cos 4x = 2\sin 2x - \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}(x+1)\operatorname{ctg}(2x+3)=1$$

$$\cos^2 2x - \sin^2 2x - 2\sin 2x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\operatorname{tg}(x+1) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(2x+3)}, \operatorname{ctg}(2x$$

$$1 - \sin^2 2x - \sin^2 2x - 2\sin 2x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\operatorname{tg}(x+1) = \operatorname{tg}(2x+3) \quad 2x+3 \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$2\sin^2 2x + 2\sin 2x - \frac{3}{2} = 0$$

$$2x+3 = x+1 + \pi n$$

$$\sin 2x = t$$

$$x = -2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$4t^2 + 4t - 3 = 0$$

$$t_1 = -\frac{3}{2} \quad t_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = -\frac{3}{2} \quad x \in \emptyset$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \quad 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ \frac{5\pi}{6} + \pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + \pi n \\ \frac{5\pi}{12} + \pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

Vārds

uzvārds

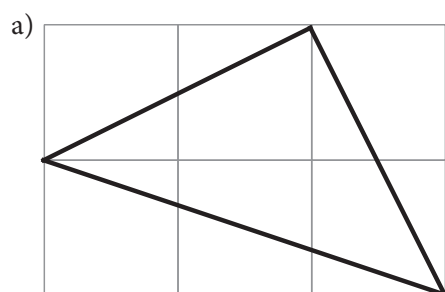
klase

datums

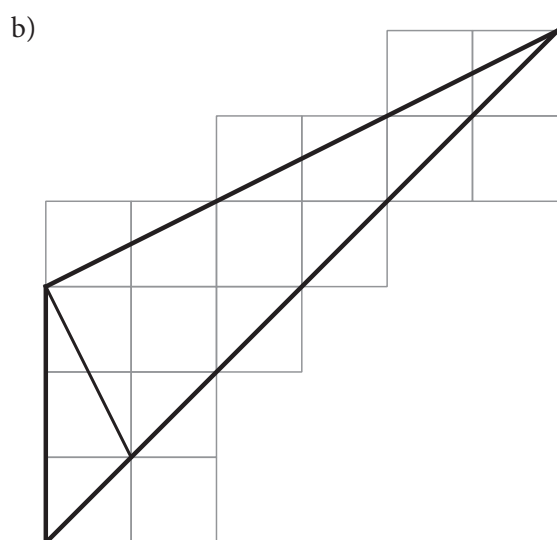
TRIGONOMETRISKAS IDENTITĀTES

Uzdevums

Izskaidro identitātes, izmantojot dotos zīmējumus!



$$\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$



$$\arctg 1 + \arctg 2 + \arctg 3 = \pi$$

Vārds

uzvārds

klase

datums

REDUKCIJAS FORMULAS

Situācijas apraksts

Funkcijas $y=\sin x$ un $y=\cos x$ ir periodiskas ar periodu 360° . Šo īpašību raksturo formulas $\sin(360^\circ+\alpha)=\sin\alpha$ un $\cos(360^\circ+\alpha)=\cos\alpha$.

Mācoties par pagrieziena leņķi un tā atlikšanu vienības riņķī, tika iegūtas formulas $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ un $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$, kas ir spēkā jebkuram šauram leņķim α .

Izceltajās formulās šaurais leņķis α tiek atņemts/pieskaitīts no/pie leņķiem 180° un 360° , kuri ir vienības riņķa kvadrantu robežleņķi. Kā zināms, ir vēl divi kvadrantu robežleņķi, 90° un 270° .

Pētāmā problēma

Vai funkciju $y=\sin x$ un $y=\cos x$ vērtības leņķiem $90^\circ\pm\alpha$, $180^\circ\pm\alpha$, $270^\circ\pm\alpha$ un $360^\circ\pm\alpha$ vienmēr var izteikt kā šaura leņķa α trigonometriskās funkcijas vērtības?

Darba gaita

1. Izmantojot vienības riņķi, noskaidro, vai izteiksmju $\sin(360^\circ-\alpha)$, $\cos(360^\circ-\alpha)$, $\sin(180^\circ+\alpha)$ un $\cos(180^\circ+\alpha)$ vērtības var izteikt ar leņķa α sinusa vai kosinusa palīdzību!
2. Izmantojot vienības riņķi, iegūsti analogiskas formulas attiecībā pret leņķiem $90^\circ\pm\alpha$ un $270^\circ\pm\alpha$!
3. Analizējot visas iegūtās formulas kopumā, saskati principu, kuru lietojot, varētu noteikt funkcijas veidu un zīmi formulu labajā pusē!
4. Sagatavo iegūto rezultātu prezentāciju!

Datu apstrāde un iegūto formulu pierādīšana

Uzdevumu veic uz papildu darba lapas!

Rezultātu izvērtēšana

Kādas iespējas vispārināt darbā iegūtos rezultātus tu saskati?

Vārds

uzvārds

klase

datums

TRIGONOMETRISKO FORMULU PIERĀDĪŠANA

Izmantojamās formulas

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

1. uzdevums (3 punkti)

Izmantojot dotās formulas, pierādi formulu $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$!

2. uzdevums (3 punkti)

Izmantojot dotās formulas, turpini formulas $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$ pierādīšanu!

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=$$

3. uzdevums (3 punkti)

Izmantojot dotās formulas, pierādi formulu $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$!

4. uzdevums (6 punkti)

Izmantojot dotās formulas, pierādi formulu $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$!

Vārds

uzvārds

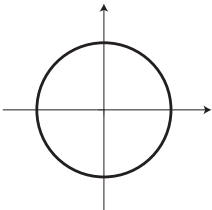
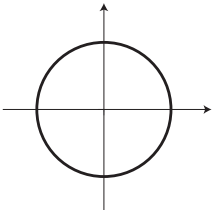
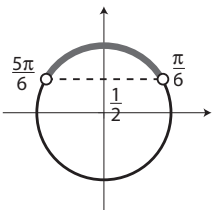
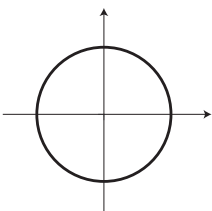
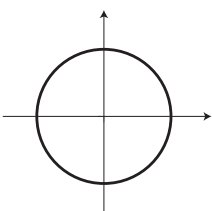
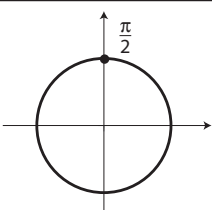
klase

datums

TRIGONOMETRISKĀS NEVIENĀDĪBAS

Uzdevums (10 punkti)

Aizpildi tabulas tukšās ailes un pabeidz zīmējumus!

	Nevienādība	Attēlojums vienības riņķa līnijā	Nevienādības atrisinājuma pieraksts, izmantojot kopu simboliku
1.	$\sin x > 0$		
2.			$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}$
3.			
4.	$\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$		
5.			$x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z}$
6.			$x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right\}, n \in \mathbb{Z}$

Vārds

uzvārds

klase

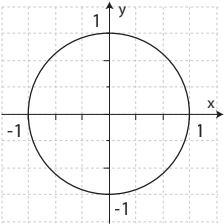
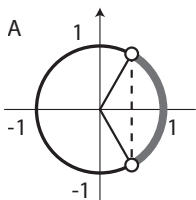
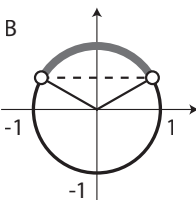
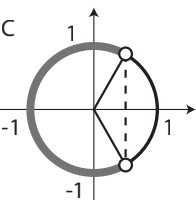
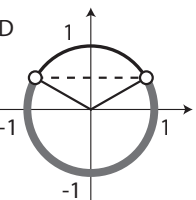
datums

TRIGONOMETRISKIE VIENĀDOJUMI UN NEVIENĀDĪBAS

1. variants

1. uzdevums (8 punkti)

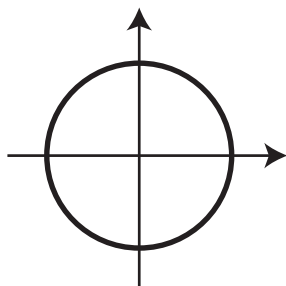
Aizpildi tabulu, kreisajā ailē ierakstot attiecīgā piemēra atbildi!

Piemērs	Atbilde
a) Vienkāršo izteiksmi! $2\sin^2x - \sin^2x$	
b) Nosaki izteiksmes vērtību! $\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ$	
c) Reducē par argumenta α trigonometrisko funkciju! $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$	
d) Atrisini vienādojumu! $\cos x = -1$	
e) Attēlo vienības riņķī leņķi α , ja $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$!	
f) Atrisini vienādojumu! $\operatorname{tg} x = 2$	
g) Aprēķini izteiksmes $\sin 3\pi$ vērtību!	
h) Kurā no zīmējumiem attēlots nevienādības $\cos x > \frac{1}{2}$ atrisinājums?	
A  B  C  D 	

2. uzdevums (5 punkti)

Atrisini vienādojumu!

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

3. uzdevums (4 punkti)Attēlo nevienādības $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ atrisinājumus vienības riņķī!Uzraksti nevienādības $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ atrisinājumu!

4. uzdevums (5 punkti)

Atrisini vienādojumu!

$$\frac{\cos 3x}{\sin 2x} = 0$$

5. uzdevums (5 punkti)

Dots, ka $\angle A$, $\angle B$ un $\angle C$ ir trijstūra ABC iekšējie leņķi un $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Pierādi, ka $\frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B} = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B$!

Vārds

uzvārds

klase

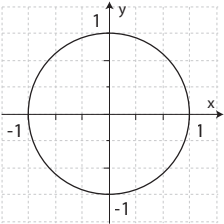
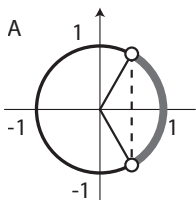
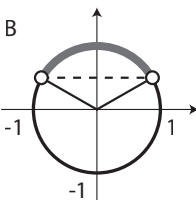
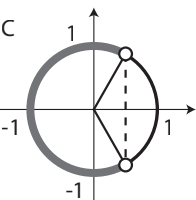
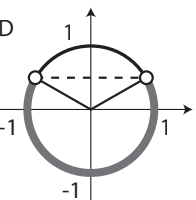
datums

TRIGONOMETRISKIE VIENĀDOJUMI UN NEVIENĀDĪBAS

2. variants

1. uzdevums (8 punkti)

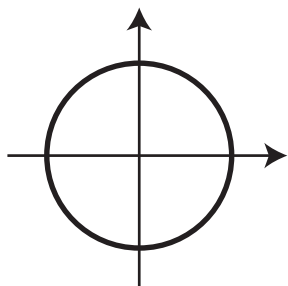
Aizpildi tabulu, kreisajā ailē ierakstot attiecīgā piemēra atbildi!

Piemērs	Atbilde
a) Vienkāršo izteiksmi! $3\cos 2x - \cos 2x$	
b) Nosaki izteiksmes vērtību! $\operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{ctg} 50^\circ$	
c) Reducē par argumenta α trigonometrisko funkciju! $\sin(\pi + \alpha)$	
d) Atrisini vienādojumu! $\sin x = -1$	
e) Attēlo vienības riņķī leņķi α , ja $\alpha = \arcsin \frac{1}{3}$!	
f) Atrisini vienādojumu! $\operatorname{tg} x = 3$	
g) Aprēķini izteiksmes $\cos 3\pi$ vērtību!	
h) Kurā no zīmējumiem attēlots nevienādības $\sin x > \frac{1}{2}$ atrisinājums?	
A  B  C  D 	

2. uzdevums (5 punkti)

Atrisini vienādojumu!

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

3. uzdevums (4 punkti)Attēlo nevienādības $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ atrisinājumus vienības riņķī!Uzraksti nevienādības $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ atrisinājumu!

4. uzdevums (5 punkti)

Atrisini vienādojumu!

$$\frac{\sin 4x}{\cos 3x} = 0$$

5. uzdevums (5 punkti)

Dots, ka $\angle A$, $\angle B$ un $\angle C$ ir trijstūra ABC iekšējie leņķi un $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.

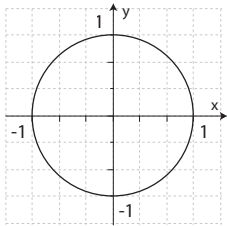
Pierādi, ka $\frac{\sin A}{\cos B \cdot \cos C} = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$!

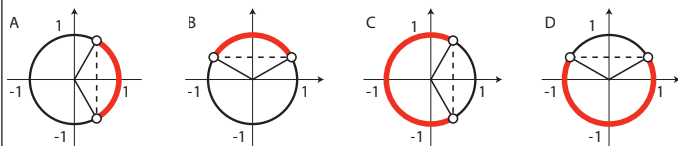
TRIGONOMETRISKIE VIENĀDOJUMI UN NEVIENĀDĪBAS

1. variants

1. uzdevums (8 punkti)

Aizpildi tabulu, kreisajā ailē ierakstot attiecīgā piemēra atbildi!

Piemērs	Atbilde
a) Vienkāršo izteiksmi! $2\sin^2 x - \sin^2 x$	
b) Nosaki izteiksmes vērtību! $\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ$	
c) Reducē par argumenta α trigonometrisku funkciju! $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$	
d) Atrisini vienādojumu! $\cos x = -1$	
e) Attēlo vienības riņķī leņķi α , ja $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$!	
f) Atrisini vienādojumu! $\operatorname{tg} x = 2$	
g) Aprēķini izteiksmes $\sin 3\pi$ vērtību!	
h) Kurā no zīmējumiem attēlots nevienādības $\cos x > \frac{1}{2}$ atrisinājums?	



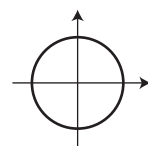
2. uzdevums (5 punkti)

Atrisini vienādojumu!

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

3. uzdevums (4 punkti)

Attēlo nevienādības $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ atrisinājumus vienības riņķī!



Uzraksti nevienādības $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ atrisinājumu!

4. uzdevums (5 punkti)

Atrisini vienādojumu!

$$\frac{\cos 3x}{\sin 2x} = 0$$

5. uzdevums (5 punkti)

Dots, ka $\angle A$, $\angle B$ un $\angle C$ ir trijstūra ABC iekšējie leņķi un $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

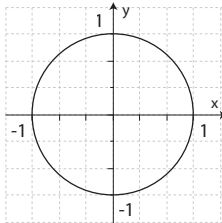
Pierādi, ka $\frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B} = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B$!

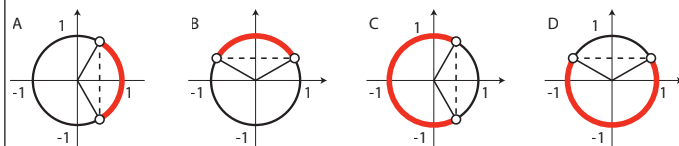
TRIGONOMETRISKIE VIENĀDOJUMI UN NEVIENĀDĪBAS

2. variants

1. uzdevums (8 punkti)

Aizpildi tabulu, kreisajā ailē ierakstot attiecīgā piemēra atbildi!

Piemērs	Atbilde
a) Vienkāršo izteiksmi! $3\cos 2x - \cos 2x$	
b) Nosaki izteiksmes vērtību! $\operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{ctg} 50^\circ$	
c) Reducē par argumenta α trigonometrisko funkciju! $\sin(\pi + \alpha)$	
d) Atrisini vienādojumu! $\sin x = -1$	
e) Attēlo vienības riņķī leņķi α , ja $\alpha = \arcsin \frac{1}{3}$!	
f) Atrisini vienādojumu! $\operatorname{tg} x = 3$	
g) Aprēķini izteiksmes $\cos 3\pi$ vērtību!	
h) Kurā no zīmējumiem attēlots nevienādības $\sin x > \frac{1}{2}$ atrisinājums?	



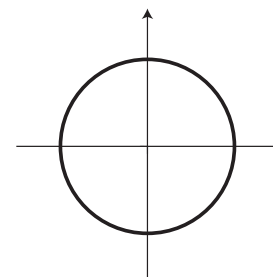
2. uzdevums (5 punkti)

Atrisini vienādojumu!

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

3. uzdevums (4 punkti)

Attēlo nevienādības $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ atrisinājumus vienības riņķī!



Uzraksti nevienādības $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ atrisinājumu!

4. uzdevums (5 punkti)

Atrisini vienādojumu!

$$\frac{\sin 4x}{\cos 3x} = 0$$

5. uzdevums (5 punkti)

Dots, ka $\angle A$, $\angle B$ un $\angle C$ ir trijstūra ABC iekšējie leņķi un $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.

Pierādi, ka $\frac{\sin A}{\cos B \cdot \cos C} = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$!

TRIGONOMETRISKIE VIENĀDOJUMI UN NEVIENĀDĪBAS

Vērtēšanas kritēriji

Uzdevums	Kritēriji	Punkti
1.	Savelk līdzīgos saskaitāmos – 1 punkts	8
	Nosaka izteiksmes vērtību – 1 punkts	
	Reducē par izteiksmi, kas satur tikai argumentu α – 1 punkts	
	Atrisina trigonometrisko pamatvienādojumu – 1 punkts	
	Attēlo vienības riņķi prasīto leņķi – 1 punkts	
	Atrisina trigonometrisko pamatvienādojumu – 1 punkts	
	Aprēķina izteiksmes vērtību – 1 punkts	
	Nosaka nevienādībai atbilstošo zīmējumu – 1 punkts	
2.	Saskata vienādojumu attiecībā pret $\sin x$ ($\cos x$) – 1 punkts	5
	Atrisina kvadrātvienādojumu – 1 punkts	
	Pāriet uz trigonometriskajiem pamatvienādojumiem – 1 punkts	
	Atrisina vienu no trigonometriskajiem pamatvienādojumiem – 1 punkts	
	Atrisina otru trigonometrisko pamatvienādojumu – 1 punkts	
3.	Iezīmē leņķus, ar kuriem izpildās vienādība – 1 punkts	4
	Iezīmē loku, kas satur dotās nevienādības atrisinājumus – 1 punkts	
	Pareizi nosaka intervālu galapunktus – 1 punkts	
	Pieraksta atbildi, ņemot vērā periodiskumu – 1 punkts	
4.	Izmanto nosacījumu par to, kad daļa ir vienāda ar 0 – 1 punkts	5
	Nosaka tās x vērtības, ar kurām skaitītājs ir vienāds ar 0 – 1 punkts	
	Nosaka tās x vērtības, ar kurām saucējs ir vienāds ar 0 – 1 punkts	
	Veicot spriedumu par vienādojuma saknēm, ņem vērā definīcijas apgabalu (izmanto vienības riņķi vai uzraksta atbildi kā sistēmu) – 1 punkts	
	Ņemot vērā veikto spriedumu (izanalizējot situāciju vienības riņķī vai atrisinot sistēmu), uzraksta vienādojuma atrisinājumu – 1 punkts	

5.	Izsaka leņķi C (A) ar α (β) un β (γ) – 1 punkts	5
	Reducē skaitītājā esošo izteiksmi – 1 punkts	
	Izmanto argumenta saskaitīšanas formulu – 1 punkts	
	Daļu izsaka kā divu daļu summu – 1 punkts	
	Saīsina daļas – 1 punkts	
Kopā		27