7.TEMATS ALGEBRISKAS IZTEIKSMES UN VIEEN\ĀDOJUMI

Lai atvēru dokumentu aktivējiet saiti. Lai atgrieztos uz šo satura rādītāju, lietojiet taustiņu kombināciju **CTRL+Home.**

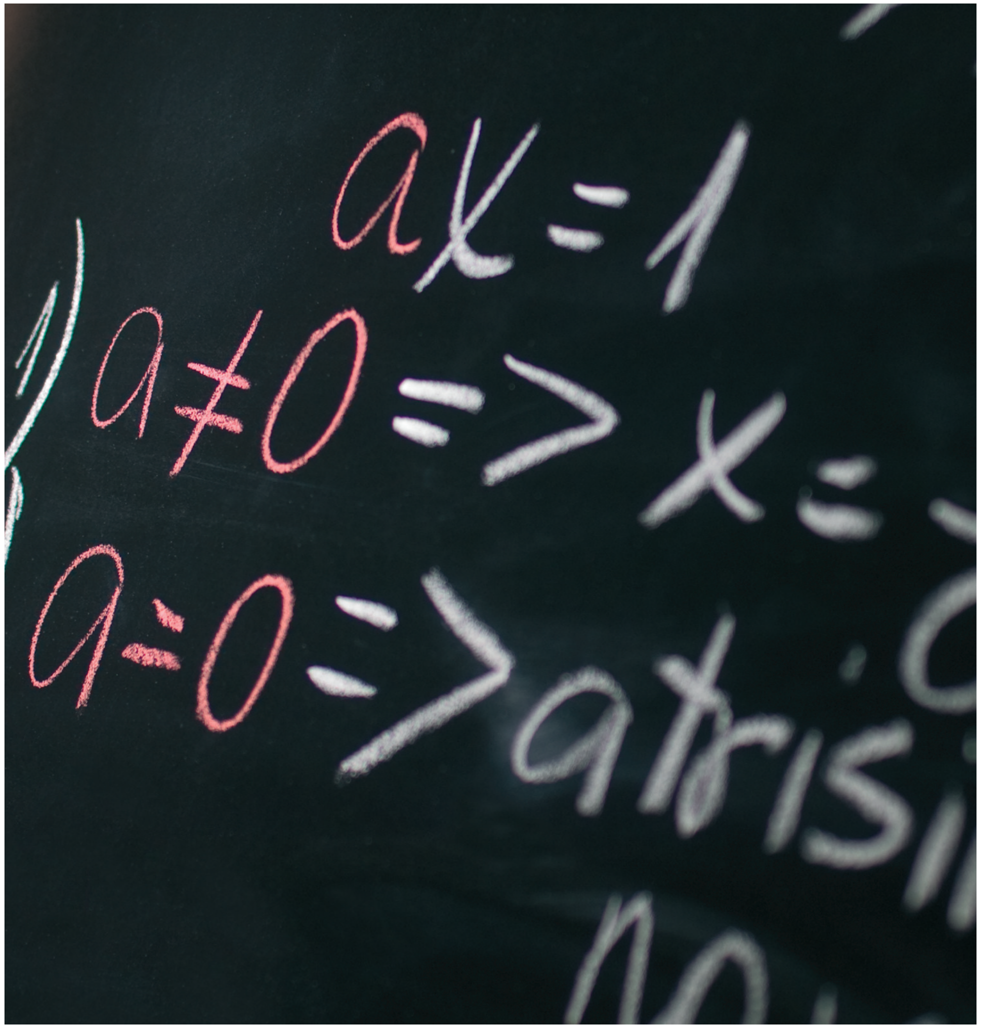
ALGEBRISKAS IZTEIKSMES UN VIENĀDOJUMI

TEMATA APRAKSTS

Temats ir nozīmīgs, jo nostiprina algoritmiskās prasmes, pilnveido izpratni par vienādojumu kā reāla procesa modeli. Būtiski ir prast izveidot algebrisku izteiksmi vai vienādojumu kā matemātisku modeli, risinot dažādus uzdevumus, piemēram, par procentiem un kustību., kā arī saskatīt atšķirību starp vienādojuma kā matemātiska modeļa atrisinājumu un reālas problēmas atrisinājumu.

Pamatskolā skolēni jau apguvuši racionālas algebriskas izteiksmes, identitātes un vienādojuma jēdzienus, prot izpildīt identiskus pārveidojumus, atrisināt lineārus un kvadrātvienādojumus. Īpaša uzmanība veltīta izteiksmes definīcijas apgabala nozīmei, aplūkojot izteiksmju pārveidojumus, kur tas mainās. Skolēniem jāveido izpratne par to, ka atrisināt vienādojumu nozīmē atrast visas tā saknes un pamatot, ka citu nav.

Izmantojot pazīstamus vienādojumus, būtiski ir attīstīt prasmes saskatīt un lietot atbilstošas vienādojumu risināšanas metodes (sadalīšana reizinātājos, substitūcijas metode, grafiskais paņēmiens), kas noderēs arī citu vienādojumu atrisināšanā. Dažkārt ir lietderīgi uzskicēt grafikus, lai rastos priekšstats par vienādojuma sakņu skaitu, turklāt tiek nostiprinātas iemaņas funkciju grafiku zīmēšanā.



CEĻVEDIS

Galvenie skolēnam sasniedzamie rezultāti

STANDARTĀ	Izprot izteiksmju definīcijas apgabala nozīmi, izpilda matemātisku izteiksmju identiskos pārveidojumus.	Izprot, ko nozīmē atrisināt vienādojumu, vienādojumu sistēmu; lieto vienādojumam, vienādojumu sistēmai piemērotus atrisināšanas algoritmus vai vispārīgās metodes.	Izvērtē iegūtos rezultātus, to ticamību un atbilstību kontekstam, novērtē izvēlēto problēmas risinājumu, iesaka uzlabojumus, piedāvā citu risinājumu.	Lieto matemātikas mācību saturā sastopamos jēdzienus un pieņemtos simbolus kā valodas kultūras elementus.	Plāno risinājumu; izvēlas vai izveido problēmai atbilstošu matemātisko modeli.	Izprot matemātikas kā zinātnes attīstības tendences un novērtē matemātikas svarīgāko sasniegumu nozīmi sabiedrības attīstībā, nosaucot piemērus.
PROGRAMMĀ	• Izpilda identiskus pārveidojumus ar daļveida racionālām algebriskām izteiksmēm. • Nosaka racionālu algebrisku izteiksmju definīcijas apgabalu.	• Izprot, ko nozīmē atrisināt vienādojumu. • Izprot daļveida vienādojuma atrisināšanu, atrisina daļveida racionālus vienādojumus, kas satur pirmās un otrās pakāpes polinomus. • Izprot substitūciju metodi, lieto to augstāku pakāpju un daļveida vienādojumu atrisināšanā. • Izprot vienādojuma atrisināšanu, izmantojot sadalīšanu reizinātājos, lieto šo metodi trešās un ceturtās pakāpes vienādojumu atrisināšanā. • Lieto vienādojumu atrisināšanas grafisko paņēmienu.	• Saskata atšķirību starp vienādojuma kā matemātiska modeļa atrisinājumu un reālās problēmas atrisinājumu; izprot, kādā skaitļu kopā meklējams konkrētās problēmas atrisinājums, novērtē vienādojuma atrisinājuma atbilstību kontekstam.	• Lieto jēdzienus – *racionāla algebriska izteiksme, identitāte, identiski vienādas izteiksmes, identisks pārveidojums, sadalīšana reizinātājos, kvadrāttrinoms, monoma un polinoma pakāpe, ekvivalenti vienādojumi, vienādojuma sakne, substitūcija (aizvietošana), sadalīšana reizinātājos, modulis* –, komentējot darbības ar izteiksmēm, vienādojuma atrisināšanas gaitu.	• Izveido algebrisku izteiksmi vai vienādojumu kā matemātisko modeli, risinot dažādus uzdevumus (par procentiem un proporcijām, par kustību, ar ģeometrisku saturu u.c.).	• Ir iepazinies ar vienādojumu atrisināšanas vēsturi, novērtē augstākas pakāpes vienādojumu atrisināšanas iespējas.
STUNDĀ	**Uzdevumu risināšana. Jautājumi un atbildes.** *SP. Racionālu algebrisku izteiksmju identiskie pārveidojumi.*	*VM. Vienādojuma grafiskā atrisināšana.* *KD. Daļveida vienādojumi.*		*KD. Izteiksmju pārveidojumi.* *KD. Identiskas izteiksmes.*	**Izpēte.** *LD. Algebriskas izteiksmes skaitļu pētīšanā.*	**Darbs ar tekstu. Uzdevumu risināšana.** *SP. Augstāku pakāpju vienādojumu atrisināšanas iespējas.*

UZDEVUMU PIEMĒRI

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Nosaka racionālu algebrisku izteiksmju definīcijas apgabalu.	Kuras no dotajām algebriskajām izteiksmēm nav definētas, ja $y=5$? a) $\frac{y+5}{y-5}$ b) $\frac{y-5}{y}$ c) $\frac{y-5}{y+5}$ d) $\frac{(y-5)^2}{y+5}$	Nosaki izteiksmes definīcijas apgabalu! a) $\frac{a-5}{a^2}$ b) $\frac{x+3}{x^2-3x-4}$ c) $\frac{3y}{y^2+1}$	Uzraksti racionālu algebrisku izteiksmi, kuras definīcijas apgabals ir $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$!
Izpilda identiskus pārveidojumus ar daļveida racionālām algebriskām izteiksmēm.	Pārveido par daļu! a) $2-\frac{x+1}{3}$ b) $\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x-1}$	Saīsini daļu! Norādi skaitļu kopu, kurā iegūtā izteiksme ir identiski vienāda ar doto! $\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-x-2}$	Nosaki, kurš apgalvojums ir patiess! Nepatiesos apgalvojumus ilustrē ar piemēriem! Dotajai izteiksmei identiski vienādu izteiksmi noteikti iegūs, ja: a) dotajā izteiksmē iznesīs kopīgo reizinātāju pirms iekavām, b) doto izteiksmi kāpinās kvadrātā, c) doto izteiksmi A reizinās un izdalīs ar vienu un to pašu izteiksmi B.
Izprot, ko nozīmē atrisināt vienādojumu.	1. Uzraksti, ko nozīmē atrisināt vienādojumu! 2. Cik atrisinājumu ir vienādojumam? a) $4x-x-3=3x+2$ b) $5y-2=4y-2+y$	1. Uzraksti lineāru vienādojumu pamatformā, kuram nav sakņu! 2. Vai dotie vienādojumi ir ekvivalenti? a) $\frac{x-2}{x+3}=\frac{3x+4}{x+3}$ un $x-2=3x+4$ b) $\frac{x-2}{x^2+1}=\frac{6}{x^2+3}$ un $x-2=6$	1. Vai vienādojums ir atrisināts pareizi? $x^4=x$ $x=1$, jo $1^4=1$ $x=0$, jo $0^4=0$ Atbilde: $x=1$ un $x=0$ 2. Atrisini vienādojumu, nekāpinot binomus kvadrātā! $(x-2)^2+(3x-5)^2=0$

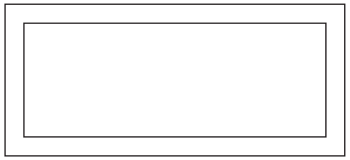
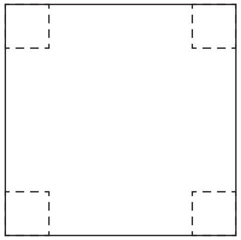
Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Izprot daļveida vienādojuma atrisināšanu, atrisina daļveida racionālus vienādojumus, kas satur pirmās un otrās pakāpes polinomus.	1. Pabeidz apgalvojumu! Daļa ir vienāda ar nulli, ja skaitītājs ………………., bet saucējs …………………………………. . 2. Atrisini vienādojumu! a) $\frac{x^2-9}{x+3}=0$ b) $\frac{2x}{x-1}-2=0$	Atrisini vienādojumu! $\frac{x}{x-10}-\frac{8}{x-6}=\frac{4x}{x^2-16x+60}$	1. Kur risinājumā ir ieviesusies kļūda? $\frac{x^2-2x}{x-2}=0$ $x^2-2x=0\cdot(x-2)$ $x^2-2x=0$ $x(x-2)=0$ $x_1=0$ $x_2=2$ 2. Nosaki, ar kādām a vērtībām vienādojumam $\frac{x^2+4x}{x+a}=0$ būs viena sakne!
Atrisina vienādojumus formā $x^n=a$, kur $n\in N$.	Atrisini vienādojumu! a) $x^3=7$ b) $x^4=-16$	Atrisini vienādojumu! $(2x-1)^3=-8$	Atrisini vienādojumu visām a vērtībām! $x^4=a$
Izprot substitūciju metodi, lieto to augstāku pakāpju un daļveida vienādojumu atrisināšanā.	1. Papildini teikumus! Vienādojumu risināšana ar substitūcijas metodi sastāv no šādiem posmiem: a) izteiksmi, kuru satur dotais vienādojums, apzīmē ……………………………………, b) uzraksta …………………………… ar jaunu mainīgo tā, ka paliek tikai ……….. mainīgais, c) atrisina ……………………………………, d) iegūtās jaunā mainīgā vērtības ievieto izteiksmē, kur tas tika nodefinēts, e) atrisina ……………………………………. 2. Atrisini vienādojumu! a) $(2x-1)^3=-1$ b) $(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15=0$	1. Ja iespējams, pārveido doto vienādojumu par vienkāršāku, izmantojot atbilstošu substitūciju (*vienādojums nav jāatrisina*)! a) $(x^2+3x)^2-10x^2-30x-24=0$ b) $(3x-5)^2-4(3x-5)=3x^2-15$ c) $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}=2{,}05$ 2. Izdomā ceturtās pakāpes vienādojumu, lai to varētu atrisināt, izmantojot substitūciju metodi!	Atrisini vienādojumu! $x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=10$

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Izprot vienādojuma atrisināšanu, izmantojot sadalīšanu reizinātājos, lieto šo metodi trešās un ceturtās pakāpes vienādojumu atrisināšanā.	1. Cik sakņu ir dotajam vienādojumam? $(3x-17)(9x-2)4x=0$ 2. Atrisini vienādojumu! $3z^4-z^3=0$	1. Atrisini vienādojumu! $x^3+2x^2-x-2=0$ 2. Kur risinājumā ieviesusies kļūda? Izskaidro tās rašanās cēloņus! $(x-2)(x-1)=1$ $x-2=1$ un $x-1=1$ $x_1=3$ un $x_2=2$	1. Uzraksti piektās pakāpes vienādojumu, kuram ir tieši trīs dažādas saknes! 2. Izmantojot tekstā doto informāciju, atrisini vienādojumu $(x-5)(y-4)=0$! Atrisināt vienādojumu ar diviem mainīgajiem x un y nozīmē: a) atrast visus skaitļu pārus *(x;y)*, kurus ievietojot dotajā vienādojumā, tas pārvēršas par pareizu skaitlisku vienādību; b) pamatot, ka citu tādu skaitļu pāru nav.
Atrisina vienādojumus, kas satur moduli $\|f(x)\|=a$ $(a\in R)$ un $\|f(x)\|=\|g(x)\|$, izmantojot moduļa definīciju un ģeometrisko interpretāciju.	Atrisini vienādojumu! a) $\|x+5\|=4$ b) $\|x^2-25\|=-25$ c) $\left\|\frac{1-2x}{x+1}\right\|=1$	1. Atrisini vienādojumu! $\|5-x\|=\|x+8\|$ 2. Atrisini vienādojumu! $5\|x-5\|-2=\|x-5\|$	Atrisini vienādojumu visām a vērtībām! $\|x-2\|=a$
Lieto vienādojumu atrisināšanas grafisko paņēmienu.	1. Papildini teikumus! Vienādojuma $2^x=3x-1$ risināšana ar grafisko paņēmienu sastāv no šādiem soļiem: a) konstruē funkcijas $y=$ ……… grafiku, b) konstruē ……………………………………, c) saskata punktus, kuros ……………………………………………………, d) nosaka vienādojuma saknes, kuras ir šo punktu ……………………………………, e) pārbauda …………………………………… 2. Konstruē funkciju $y=2x-1$ un $y=x^3$ grafikus vienā koordinātu sistēmā! Izmantojot grafikus, atrisini vienādojumu $2x-1=x^3$!	1. Cik sakņu ir dotajam vienādojumam? $2+x^2=\frac{12}{x}$ 2. Nosaki, cik sakņu ir vienādojumam $0{,}3^x-x^2+x=1$! Nosaki sakņu aptuvenās vērtības ar precizitāti līdz desmitdaļām!	1. Kurus no dotajiem vienādojumiem tu risinātu ar grafisko paņēmienu un kurus – ne? Atbildi pamato! a) $x-2=3x$ b) $x^3-2=x$ c) $x^2=x+2$ 2. Nosaki vienādojuma $x^2=ax-1$ sakņu skaitu atkarībā no a vērtības!

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Lieto jēdzienus – ***racionāla algebriska izteiksme, identitāte, identiski vienādas izteiksmes, identisks pārveidojums, sadalīšana reizinātājos, kvadrāttrinoms, monoma un polinoma pakāpe, ekvivalenti vienādojumi, vienādojuma sakne, substitūcija (aizvietošana), sadalīšana reizinātājos, modulis*** **–, komentējot darbības ar izteiksmēm, vienādojuma atrisināšanas gaitu.**	1. Uzraksti: a) identitāti, b) kvadrāttrinomu, c) trešās pakāpes polinomu! 2. Komentē dotos pārveidojumus! $\frac{6x^2-54}{3x+9}=\frac{6(x^2-9)}{3(x+3)}=\frac{2(x^2-9)}{(x+3)}=\frac{2(x+3)(x-3)}{(x+3)}=$ $=2(x-3)=2x-6$	Kur vienādojuma risinājumā ieviesusies kļūda? Izskaidro tās rašanās cēloņus! $x^2-4x=x-4$ $x(x-4)=x-4 \;\vert:(x-4)$ $x=1$	Formulē nosacījumu par izteiksmi $c(x)$, lai vienādojumi $a(x)=b(x)$ un $a(x)\cdot c(x)=b(x)\cdot c(x)$ būtu ekvivalenti!
Izvēlas paņēmienu polinomu sadalīšanai reizinātājos: iznesot kopīgo reizinātāju pirms iekavām, grupējot polinoma locekļus, izmantojot saknes, lietojot saīsinātās reizināšanas formulas (arī kubu summa, starpība, summas, starpības kubs).	1. Kura no izteiksmēm ir sadalīta reizinātājos? a) $(x-2)\cdot a-2$ b) $x\cdot a-2\cdot x$ a) $(x-2)\cdot(a-2)$ b) $(x-a-2)\cdot 2$ 2. Norādi, ar kuru no paņēmieniem (iznešana pirms iekavām, grupēšana, sakņu izmantošana, saīsinātās reizināšanas formulu lietošana) var sadalīt reizinātājos doto izteiksmi! a) $c^4d-c^5d^3$ b) x^3+x^2-9x-9 c) $x^2+8x-20$ d) $0{,}25-4b^2$ e) m^3-125 f) $25y^2+30y+9$ 3. Uzraksti “pazīmi”, pēc kuras varētu pateikt, vai dotā izteiksme ir sadalīta reizinātājos!	1. Sadali reizinātājos! a) $(m+3)^2-a(m+3)$ b) a^6-b^6 c) $25-(b+3)^2$ d) $7y^3-56$ e) $5y^2+8y-13$ f) $9-m^2-2mn-n^2$ 2. Sadali izteiksmi x^6-1 reizinātājos divos veidos!	Sadali reizinātājos izteiksmi x^4+64, izmantojot identisku pārveidojumu $a+b=a+b+c-c$!

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Saskata likumsakarības, iespēju vispārināt saīsinātās reizināšanas formulas.	Kāpini dotos polinomus (ja nepieciešams, pārej uz reizināšanu)! $(a+b)^2=$ $(a+b+c)^2=$ $(a+b+c+d)^2=$ Izmantojot iegūtos rezultātus, papildini teikumu! Summas kvadrāts vienāds ar visu saskaitāmo .... un katru divu saskaitāmo divkāršotu .... summu.	Kāpini binomu! $(a-b)^0=$ $(a-b)^1=$ $(a-b)^2=$ $(a-b)^3=$ $(a-b)^4=$ utt. Ja vari saskatīt likumsakarību, noformulē to! Salīdzini izkāpināto binomu koeficientus ar Paskāla trijstūri (M_10_UP_07_VM1 un VM2)!	Izveido uzdevumu virkni (no vienkāršākā uz sarežģītāko), kuru atrisināšana tev ļautu sadalīt reizinātājos izteiksmi a^5-b^5!
Analizē gadījumus, risinot lineārus vienādojumus ar parametru formā $ax=b(a,b\in R)$, $\lvert x\rvert=a(a\in R)$ un $ax^2=b(a,b\in R)$.	Nosaki, kāds skaitlis jāieraksta daudzpunktu vietā, lai vienādojumam nebūtu sakņu! $\ldots\cdot x=5$	Atrisini vienādojumu, ja nezināmais ir x! a) $ax=4$ b) $x^2=a$	Atrisini vienādojumu $ax=b$ visām iespējamām a un b vērtībām!
Izveido algebrisku izteiksmi vai vienādojumu kā matemātisko modeli, risinot dažādus uzdevumus (par procentiem un proporcijām, par kustību, ar ģeometrisku saturu u.c.).	Kvadrāta mala ir b cm. Divas pretējās kvadrāta malas tika pagarinātas par 2 cm, bet pārējās divas malas palielinātas par 20 %. Izsaki iegūtā taisnstūra laukumu kā algebrisku izteiksmi!	1. Preces sākotnējā cena bija a lati. Tā tika paaugstināta par 25 %. Pēc kāda laika tā tika paaugstināta vēl par 20 %. Uzraksti izteiksmi, kas izsaka pašreizējo cenu! 2. Divi strādnieki nopelnīja kopā 310 latu. Cik latu nopelnīja katrs strādnieks, ja 4 % no pirmā strādnieka algas ir vienādi ar 6 % no otrā strādnieka algas?	Tūristam noteiktā laikā bija jānokļūst līdz autobusa pieturai. Noejot pirmajā stundā 4 km, viņš aprēķināja, ka ejot ar šādu ātrumu, viņš autobusu nokavēs par 40 minūtēm, tāpēc atlikušo ceļu viņš gāja ar ātrumu 6 km/h un nonāca autobusa pieturā 20 minūtes pirms tā atiešanas. Aprēķini, cik garš ceļš bija jānoiet tūristam!

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Saskata atšķirību starp vienādojuma kā matemātiska modeļa atrisinājumu un reālās problēmas atrisinājumu; izprot, kādā skaitļu kopā meklējams konkrētās problēmas atrisinājums; novērtē vienādojuma atrisinājuma atbilstību kontekstam.	1. Uzraksti, kurā skaitļu kopā *(N, Z, Q, R)* vajadzētu atrasties atrisinājumam, ja jāaprēķina: a) cilvēku skaits, kas piedalās ekskursijā, b) trijstūra malas garums, c) dienu skaits, d) motocikla ātrums, e) divu veselu skaitļu reizinājums, f) šķīduma masa! 2. Trijstūra augstums ir par 5 cm garāks nekā mala, pret kuru tas novilkts. Aprēķini šīs malas garumu, ja zināms, ka trijstūra laukums ir 12 cm^2! 3. Prognozē, kādā intervālā ir dotā uzdevuma atrisinājums (*uzdevums nav jāatrisina*)! Piena kombinātā piegādāja 1260 kg piena, kura tauku saturs bija 3,15 %, un 1540 kg piena, kura tauku saturs bija 2,85 %. Visu pienu sajauca kopā. Aprēķini iegūtā maisījuma tauku saturu procentos!	Baseinam pievienotas divas caurules. Pirmā caurule viena pati baseinu piepilda par 3 stundām ātrāk nekā otrā. Ja pirmo cauruli atvērtu par 1,5 stundām vēlāk nekā otro cauruli, tad tvertne piepildītos 7 stundās. Cik stundās katra caurule atsevišķi var piepildīt baseinu? Apzīmējot ar x stundu skaitu, kurā baseinu piepilda pa otro cauruli, sastādot vienādojumu $\frac{1}{x}\cdot 7+\frac{1}{x-3}\cdot 5{,}5=1$ un atrisinot to, ieguva saknes $x_1=14$ un $x_2=1{,}5$. Novērtē vienādojuma atrisinājuma atbilstību uzdevuma nosacījumiem!	Vienādsānu trijstūra pamats ir par 6 cm garāks nekā sānu mala, bet trijstūra perimetrs ir p. Aprēķini trijstūra malas un nosaki, ar kādām p vērtībām uzdevumam ir atrisinājums!
Ir iepazinies ar vienādojumu atrisināšanas vēsturi, novērtē augstākas pakāpes vienādojumu atrisināšanas iespējas.	Nosauc slavenus matemātiķus, kuri savos zinātniskajos darbos ir pētījuši vienādojumus!	1. Uzraksti, tavuprāt, racionālāko dotā vienādojuma atrisināšanas metodi! a) $x^5-2x-1=0$ b) $x^6-x^3-2=0$ c) $x^4+x^3-2x^2=0$ 2. Atrodi informāciju par to, kuras pakāpes vienādojumiem vispārīgā veidā ir sakņu atrisināšanas formulas! Uzraksti šīs formulas!	Vienādojumam $x^3+x^2-5x-2=0$ viena no saknēm ir 2. Atrodi pārējās vienādojuma saknes!

Sasniedzamais rezultāts	I	II	III
Risinot praktiskus uzdevumus, izmanto vienādojumus.	Temperatūras skaitliskās vērtības pēc Celsija skalas *(C)* un Fārenheita skalas *(F)* saista sakarība $C=\frac{5}{9}(F-32)$. Kāda temperatūra pēc Fārenheita skalas atbilst 30 grādiem pēc Celsija skalas? Temperatūras skaitliskā vērtība pēc Celsija skalas ir puse no temperatūras skaitliskās vērtības pēc Fārenheita skalas. Cik liela ir temperatūra pēc Celsija skalas?	1. Doti 2 litri 9 % etiķa šķīduma. Kāds daudzums 70 % etiķa esences jāpielej, lai iegūtu 20 % etiķa šķīdumu? 2. Sporta laukumam ir taisnstūra forma, kura malas ir 30 m un 80 m. Visapkārt ap to ir skrejceļš, kura platums gar laukuma malām ir vienāds (zīm.). Skrejceļa laukums ir vienāds ar sporta laukuma platību. Nosaki skrejceļa platumu ar precizitāti līdz desmitdaļām! *Atļauts izmantot kalkulatoru.* 	Izdarot stūros vienādus kvadrātveida iegriezumus (zīm.) un uzlokot tos uz augšu, no kvadrātveida kartona gabala jāizgatavo kārba, kuras augstums ir 8 garuma vienības un tilpums ir 128 tilpuma vienības. Kāda izmēra kvadrātveida kartons jāņem? *Līmēšanai maliņas nav jāparedz.* 

RACIONĀLU ALGEBRISKU IZTEIKSMJU IDENTISKIE PĀRVEIDOJUMI

Vērtētāja vārds ……………………………… Risinātāja vārds ………………………………

Uzdevuma numurs	Vērtējums par			Risinātāja komentārs par savu darbu
	atrisinājumu (pareizs/daļēji atrisināts/ nepareizs/nav risināts/ nezinu)	stāstījumu (skaidrs/daļēji izprotams/ trūkst pamatojuma/nav stāstījuma)	atbildēm uz jautājumiem (saprotamas/nevar paskaidrot/nebija jautājumu)	
1.				
2.				
3.				

Savstarpējās sadarbības vērtējums: ……………………………………………………………………………………

Vērtētāja paraksts: Risinātāja paraksts:

✂……

RACIONĀLU ALGEBRISKU IZTEIKSMJU IDENTISKIE PĀRVEIDOJUMI

Vērtētāja vārds ……………………………… Risinātāja vārds ………………………………

Uzdevuma numurs	Vērtējums par			Risinātāja komentārs par savu darbu
	atrisinājumu (pareizs/daļēji atrisināts/ nepareizs/nav risināts/ nezinu)	stāstījumu (skaidrs/daļēji izprotams/ trūkst pamatojuma/nav stāstījuma)	atbildēm uz jautājumiem (saprotamas/nevar paskaidrot/nebija jautājumu)	
1.				
2.				
3.				

Savstarpējās sadarbības vērtējums: ……………………………………………………………………………………

Vērtētāja paraksts: Risinātāja paraksts:

TREŠĀS PAKĀPES VIENĀDOJUMU ATRISINĀŠANA

Trešās pakāpes vienādojumu var pārveidot formā $ax^3 + ax^2 + cx + d = 0$, ceturtās pakāpes vienādojumu – formā $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, kur a, b, c utt. – kaut kādi skaitļi, pie tam $a \neq 0$. Var pierādīt, ka trešās pakāpes vienādojumam ir ne vairāk kā trīs saknes, ceturtās pakāpes vienādojumam – ne vairāk kā četras saknes. Vispār – n-tās pakāpes vienādojumam ir ne vairāk kā n saknes.

Gan trešās, gan ceturtās pakāpes vienādojumiem ir zināmas sakņu formulas, taču šīs formulas ir samērā sarežģītas. Piektās un arī augstākas pakāpes vienādojumiem nav vispārīgu formulu sakņu aprēķināšanai. Trešās un arī augstāku pakāpju vienādojumus iespējams atrisināt, pielietojot kādu speciālu paņēmienu. Dažus vienādojumus ir izdevīgi risināt, izmantojot polinoma sadalīšanu reizinātājos, substitūcijas metodi.

Daudziem vienādojumiem, arī augstāku pakāpju, viegli noteikt sakņu aptuvenās vērtības, izmantojot grafisko paņēmienu.

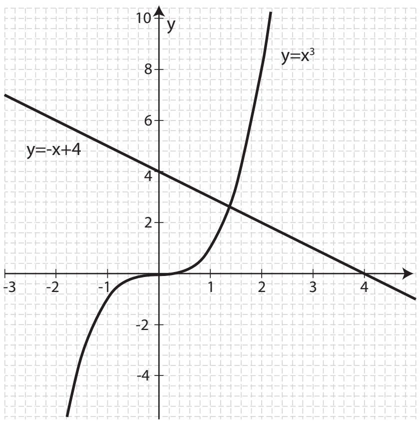
Piemērs.

Uzdevums: atrisināt vienādojumu $x^3 + x - 4 = 0$.

Risinājums.

Doto vienādojumu izsaka formā $x^3 = -x + 4$.

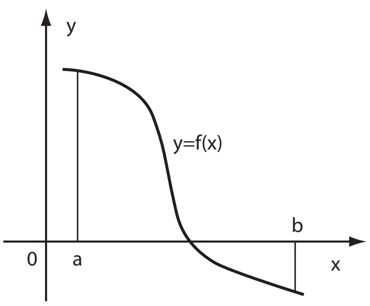
Konstruē vienā koordinātu sistēmā funkciju $y = x^3$ un $y = -x + 4$ grafikus.



1. zīm.

Kā redzams 1. zīm., grafiki krustojas vienā punktā (viena no funkcijām ir augoša visā definīcijas apgabalā, otra – dilstoša). Grafiku krustpunkta abscisa ir aptuveni vienāda ar 1,4. Tātad vienādojumam ir tikai viena sakne $x \approx 1,4$.

Jāpiebilst, ka grafiskais paņēmiens neuzrāda rezultātu ar pietiekamu precizitāti. Ja nepieciešams atrast sakņu vērtības ar lielāku precizitāti, tad grafiski noteiktās sakņu aptuvenās vērtības var precizēt, veicot skaitliskus aprēķinus.



2. zīm.

Vesela vienādojuma sakņu vērtības var precizēt saskaņā ar šādu apgalvojumu: funkcijas $y = f(x)$, kur $f(x)$ ir polinoms, grafiks ir nepārtraukta līnija. No tā savukārt izriet šāds secinājums: ja kāda intervāla $[a, b]$ galapunktos funkcijas vērtības ir ar dažādām zīmēm, tad minētajā intervālā noteikti ir sakne $f(x) = 0$.

Precizēsim vienādojuma $x^3 + x - 4 = 0$ atrasto saknes vērtību. No grafiku konstrukcijas redzams (1. zīm.), ka šī vienādojuma sakne pieder pie intervāla [1; 2]. Par to var pārliecināties, aprēķinot funkcijas $f(x) = x^3 + x - 4$ vērtības, ja $x = 1$ un $x = 2$.

Iegūst, ka $f(1) = -2 < 0$, bet $f(2) = 6 > 0$.

Sadala 10 vienādās daļās koordinātu taisnes nogriezni, kura galapunkti ir 1 un 2: 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; ...; 1,8; 1,9; 2,0.

Aprēķina funkcijas $f(x) = x^3 + x - 4$ vērtības, kas atbilst norādītajām argumenta x vērtībām tik ilgi, kamēr atrod to 0,1 vienības garo intervālu, kura galapunktos dotās funkcijas vērtības ir ar dažādām zīmēm. Šajā nolūkā ērti izmantot kalkulatoru.

Tādējādi atrod, ka $f(1,3) = -0,503 < 0$, bet $f(1,4) = 0,144 > 0$. Tas nozīmē, ka vienādojuma saknes pieder pie intervāla [1,3; 1,4]. Par decimālo tuvinājumu ar precizitāti līdz 0,1 var izvēlēties katru no skaitļiem 1,3 vai 1,4.

Lai noteiktu saknes ar vēl lielāku precizitāti, tad 10 vienādās daļās jāsadala koordinātu taisnes nogrieznis, kura galapunkti ir 1,3 un 1,4. Pēc tam aprēķina funkcijas vērtības, ja x ir 1,30; 1,31; 1,32; ...; 1,38; 1,39; 1,40.

Iegūst, ka $f(1{,}37) = -0{,}058647 < 0$, bet $f(1{,}38) = 0{,}008072 > 0$. Tātad sākotnējā vienādojuma sakne pieder pie intervāla [1,37; 1,38]. Par decimālo tuvinājumu ar precizitāti līdz 0,01 var izvēlēties katru no skaitļiem 1,37 vai 1,38.

Analoģiski var atrast vienādojuma sakņu decimālos tuvinājumus ar precizitāti līdz 0,001; 0,0001 utt.

Vienādojuma $x^3 + x - 4 = 0$ saknes var noteikt arī pēc Kardano formulas.

Ja trešās pakāpes vienādojums ir kanoniskajā formā $y^3 + py + q = 0$, tad

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Vienādojumam $x^3 + x - 4 = 0$ koeficienti $p = 1$ un $q = -4$, tad

$$x = \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{1^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{1^3}{27}}} \approx 1{,}3787967.$$

Vispārīgajam trešās pakāpes vienādojumam $ax^3 + ax^2 + cx + d = 0$ sakni ar Kardano formulu var noteikt, ja to pārveido kanoniskajā formā, aizstājot $x = y - \frac{b}{3a}$ un iegūstot vienādojumu $y^3 + py + q = 0$, kur $p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}$ un $q = \frac{2b^3}{27a^3} + \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$.

Vārds .... uzvārds .... klase .... datums ....

Uzdevums

Iepazīsties ar divām trešās pakāpes vienādojumu atrisināšanas metodēm, izdomā tām nosaukumu un aizpildi tabulu!

Metodes nosaukums		
Kādos gadījumos šo metodi var lietot?		
Metodes trūkumi.		
Darbību secība.		

VIENĀDOJUMU ATRISINĀŠANAS VĒSTURE

Ferrari *(Ferrari)* Ludoviko (1522 – 1565) – itāļu matemātiķis. Atradis ceturtās pakāpes vienādojuma vispārējo atrisinājumu.

Ferro *(del Ferro)* Scipions (1465 – 1526) – itāļu matemātiķis. Noskaidrojis paņēmienu, kā atrisināt kubvienādojumu $x^3 + mx = n$.

Anjezi *(Agnesie)* Marija Gaetana (1718 – 1799) – itāļu matemātiķe. Grāmatā "Analīzes pamati" (1748) pierādījusi, ka jebkuram kubvienādojumam ir trīs saknes.

Haijams Omārs (1048 – ~1123) – persiešu dzejnieks, filozofs, astronoms un matemātiķis. Klasificējis vienādojumus un izveidojis pirmo 3 pakāpju vienādojumu risināšanas teoriju.

Hariots *(Harriot)* Tomass (1560 – 1621) – angļu matemātiķis. Attīstījis algebras simboliku, ieviesis zīmes > un <, pierakstījis vienādojumus formā, kas tuva mūsdienu pierakstam. Pirmais ievērojis, ka vienādojuma sakņu skaitu nosaka vienādojuma pakāpe.

Hērons (~1. gs. p. m. ē.) – sengrieķu zinātnieks. (..) Aprakstījis kvadrātvienādojuma skaitlisko atrisināšanu, kvadrātsakņu un kubsakņu aptuvenu aprēķināšanu.

Horezmī al Muhameds Ben Musa (9. gs.) – uzbeku matemātiķis, astronoms, ģeogrāfs. Aplūkojis pirmās un otrās pakāpes vienādojumu dažādus tipus. (..)

Horners *(Horner)* Viljams Džordžs (1786 – 1837) – angļu matemātiķis. Publicējis polinoma reālo sakņu tuvinātas aprēķināšanas paņēmienu. Hornera vārdā nosaukta shēma polinoma dalīšanai ar binomu $x - a$.

Kardano *(Cardano)* Džeromino (1501 – 1676) – itāļu matemātiķis, filozofs, ārsts. Pirmais publicējis formulu trešās pakāpes vienādojumu atrisināšanai, tādējādi izraisot asu diskusiju ar N. Tartalju. Viens no pirmajiem Eiropā pieļāvis vienādojumu negatīvo sakņu eksistenci.

Tartalja *(Tartaglia)* Nikolo (~1499 – 1557) – itāļu matemātiķis. Noskaidrojis 3. pakāpes vienādojuma vispārīgo atrisinājumu, ko publicēja Dž. Kardano. Šis fakts radīja vienu no lielākajiem skandāliem matemātikas vēsturē. Publicējis arī binomiālo koeficientu tabulas. Norādījis, ka šāviņa lidojuma trajektorija ir parabola un tā sasniedz vislielāko attālumu, ja to izšauj 45^o leņķī.

Vans Sjao Tuns (7. gs.) – ķīniešu astronoms un matemātiķis. Risinot ģeometriskus uzdevumus, ieguvis trešās pakāpes vienādojumus $x^3 + px^2 = q$ un $x^3 + ax^2 + bx = c$. Kaut arī atrisinājumi noteikti pareizi, risināšanas metode netiek atklāta.

(*Briedis Z.* Izcilie matemātiķi. – Rīga: Zvaigzne, 1990)

FRANSUĀ VJETS *(VIETE)* (1540 – 1603)

Fransuā Vjets ir izcilākais franču 16. gadsimta matemātiķis. Dažkārt Vjetu dēvē par mūsdienu simboliskās algebras tēvu, jo viņš daudz darba ieguldījis burtu apzīmējumu izveidošanā.

Pēc profesijas Fransuā Vjets bija jurists, brīvo laiku viņš veltīja matemātikai. Savas darbības sākumā Vjets bija parlamenta padomnieks Bretaņā, pēc tam kalpoja karaļa Indriķa III un Indriķa IV galmā. Te līdztekus kārtējiem darbiem izpaudās Vjeta spējas slepeno ziņojumu atšifrēšanā. (..) Jau jaunībā Fransuā Vjets iepazinās ar Kopernika mācību par heliocentrisko sistēmu un sāka interesēties par astronomiju. Šī aizraušanās lika jauneklim nodarboties ar trigonometriju un algebru. Pamazām šīs nozares viņam kļuva par galvenajām, un rezultātā Vjets kļuva par jauna attīstības ceļa iesācēju algebrā.

1545. gadā iznāca itāļu matemātiķa Dž. Kardano darbs “Lielā māksla jeb Par algebras likumiem”. Šajā grāmatā saglabājās arābu tradīcija pārveidot katru vienādojumu tā, lai tajā būtu tikai pozitīvi locekļi. Kardano izmantoja jau senāk iegūtos vienādojumus, vēl aplūkoja 4. pakāpes un dažus augstāku pakāpju vienādojumus, tādējādi iegūstot 66 dažāda veida vienādojumus. Katram no tiem bija savs atrisināšanas paņēmiens, un algebra kļuva neizsakāmi sarežģīta.

Fransuā Vjets stājās pie vienādojumu apvienošanas un vispārināšanas. Viņš izveidoja burtu apzīmējumus gan pozitīviem, gan arī negatīviem lielumiem. Jaunā simboliskā valoda kā analīzes līdzeklis ļāva ātri visus nosacījumus ietvert burtu formulās. 1591. gadā iznāca Vjeta grāmata “Ievads analīzes mākslā” (“In artem analyticam isagoge”). Tās sākumā ir ievads, kurā izskaidrota analīzes nozīme, uzsverot, ka tā ir metode matemātisku jautājumu atrisināšanai un teorēmu pierādīšanai.

Vienādojumos Vjets dotos lielumus apzīmēja ar līdzskaņiem, meklējamos – ar patskaņiem. (..) Vjets lietoja darbību zīmes (+ un –) mūsdienu nozīmē, bez tam viņš ir ieviesis arī jēdzienu “koeficients”. (..)

Matemātikas kursā vidusskolā pazīstamā Vjeta teorēma par sakarībām starp kvadrātvienādojuma koeficientiem un tā saknēm pirmo reizi formulēta 1591. gadā: ja $B + D$ reizināts ar A mīnus A^2 vienāds ar BD, tad A vienāds ar B un vienāds ar D. Te jāatceras, ka A (patskanis) apzīmē x, bet B un D (līdzskaņi) apzīmē koeficientus.

Tātad (ar mūsdienu apzīmējumiem), ja $(a + b)x - x^2 = ab$, t.i., $x^2 - (a + b)x + ab = 0$, tad $x_1 = a$, $x_2 = b$.

Jāuzsver, ka Fransuā Vjets šo teorēmu vispārinājis arī augstāku pakāpju vienādojumiem.

(*Briedis Z.* Izcilie matemātiķi. – Rīga: Zvaigzne, 1990)

....
Vārds uzvārds klase datums

DVĪŅU SKAITĻI

Situācijas apraksts

Kādam studentam patika “spēlēties” ar skaitļiem. Viņš izvēlējās naturālu skaitli A, kas nedalās ar 10, un uzrakstīja tā *spoguļattēlu* – skaitli A_S. Par *spoguļattēlu* viņš nosauca skaitli, ko iegūst, uzrakstot dotā skaitļa ciparus apgrieztā secībā, piemēram,
$A = 246$ un $A_S = 642$.

Skaitļus A un B viņš nosauca par *dvīņiem*, ja izpildījās šāda sakarība:
$A \cdot B = A_S \cdot B_S$. Piemēram, *dvīņi* ir $A = 462$ un $B = 396$, jo $A_S = 264$,
$B_S = 693$ un $462 \cdot 396 = 264 \cdot 693$. Students nolēma pētīt divciparu dvīņu skaitļus.

No iespējamām **pētāmām problēmām** viņš izvēlējās: Kāda ir sakarība starp dvīņu skaitļu cipariem?

Lai atrastu atbildi, students aplūkoja dažus divciparu dvīņu skaitļus 42 un 36, 24 un 21, 43 un 68, 96 un 23, 63 un 12. Viņam ilgi neizdevās ieraudzīt sakarību starp šo skaitļu cipariem, līdz viņam ienāca prātā uzrakstīt dvīņu skaitļus vienu zem otra:

$$\begin{array}{c} 42 \\ \underline{36} \\ 1212 \end{array} \quad \begin{array}{c} 24 \\ \underline{21} \\ 44 \end{array} \quad \begin{array}{c} 43 \\ \underline{68} \\ 2424 \end{array} \quad \begin{array}{c} 96 \\ \underline{23} \\ 1818 \end{array} \quad \begin{array}{c} 63 \\ \underline{12} \\ 66 \end{array}.$$

Tas, ko viņš ievēroja un pierakstīja zem dvīņu skaitļiem, ļāva studentam formulēt **hipotēzi –** divciparu dvīņu skaitļu pirmo ciparu reizinājums ir vienāds ar otro ciparu reizinājumu.

Hipotēzes pierādījums

Rezultātu analīze, izvērtējums, secinājumi